Math. P. 188 ^{q}/= Gruber

4960

Ausführliche Anleitung

zum Gebrauche

des

„Rechenunterrichts in der Volks- und höhern Bürgerschule"

nebst

der Beantwortung der in diesem Buche enthaltenen Fragen und Aufgaben.

Für den Lehrer bearbeitet

von

Karl Gruber.

Bayerische Staatsbibliothek

Dritte, bedeutend vermehrte Auflage.

Karlsruhe,

Druck und Verlag der G. Braun'schen Hofbuchhandlung.

1851.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede

zur ersten und zweiten Auflage.

Gegenwärtige Schrift bildet in Verbindung mit dem „Rechenunterrichte in der Volks- und höhern Bürgerschule" eine vollständige Anweisung zur Ertheilung eines zweckmäßigen Rechenunterrichtes. Der „Rechenunterricht", welcher vorzugsweise für die Hand des Schülers bestimmt ist, enthält in lückenlos fortschreitender Reihe die Fragen und Aufgaben, welche dem Schüler zu geben sind, um ihn zu der Selbstthätigkeit anzuleiten, durch welche die in ihm liegende Denkkraft entwickelt und gebildet wird, und er zugleich die nöthige Fertigkeit in Behandlung der Zahlen und Zahlenverhältnisse erlangt, und unterscheidet sich daher wesentlich von einem gewöhnlichen Aufgabenbuche. — Haben die Schüler dieses Buch in Händen, so wird das zeitraubende Diktieren der Aufgaben erspart, und es ist dem Lehrer leicht, zwei Abtheilungen zu gleicher Zeit zu beschäftigen, indem die Abtheilung, die nicht mündlich unterrichtet wird, eine bestimmte Anzahl Aufgaben im „Rechenunterrichte" löst und zu denselben so lange ähnliche Aufgaben bildet, bis der Lehrer wieder zu ihr zurückkehrt; auch wird es allein hierdurch möglich, eine genügende Anzahl von Uebungsbeispielen durcharbeiten zu lassen. Wird das Buch in Gymnasien und höheren Bürgerschulen gebraucht; so verwende man, sobald der Schüler bis zu §. 26 gekommen ist, die Hälfte der wöchentlichen Unterrichtsstunden auf die Auflösungen der Aufgaben des „Rechenunterrichts" und die andere Hälfte der Stunden auf den in meinem „Arithmetischen Unterricht" *) behandelten Stoff.

---

*) Der Arithmetische Unterricht in Gymnasien und höhern Bürgerschulen. Eine Fortsetzung des Rechenunterrichts in der Elementarschule. Karlsruhe, G. Braun'sche Hofbuchhandlung, 1842.

Die in gegenwärtiger Schrift zum Gebrauche des „Rechenunterrichts" gegebene Anleitung macht den Lehrer mit den Ansichten des Verfassers auf jeder Stufe bekannt, lehrt den Weg kennen, welchen man einzuschlagen hat, um für eine Aufgabe die Auflösung zu finden, und enthält nebst den nöthigen didaktischen Bemerkungen die Antworten zu den Fragen und Aufgaben. Eine Anweisung zur Berechnung der Raumgrößen gibt diese Schrift nicht, weil die Ausmessung und Berechnung räumlicher Größen einen Theil eines besondern Lehrgegenstandes bildet, über welchen jeder Lehrer genügende Auskunft in meiner „Raumformen- und Raumgrößenlehre" *) finden kann.

Als leitender Grundsatz bei Ausarbeitung dieser Schriften diente mir die Ueberzeugung, daß der Unterricht nur Mittel, die Erziehung Zweck sein soll, und daß Niemand wahre Bildung hat, als in wiefern er die in ihm gelegene Kraft selbst entwickelte. Es soll demnach der Unterricht den Schüler dahin führen, daß er befähigt und gewillt sei, in allen Dingen das Wahre und Rechte, welches immer auch das Gute und Schöne ist, zu erkennen, und aller Unterricht, ja das ganze Schulleben hat die Aufgabe, den Zögling zu der Selbstständigkeit zu erziehen, daß er die Neigung und die Kraft habe, das als wahr und recht Erkannte auch in Ausübung zu bringen. Deßhalb kann auch nur der Unterricht bildend genannt werden, der mitwirkt, daß der Zögling zur sichern Erkenntniß des Wahren und somit auch des Sittlichen befähigt werde. Es entsteht nun die Frage: Unter welchen Bedingungen kann ein Rechenunterricht bildend genannt werden? Es wird dies nur unter folgenden zwei Bedingungen der Fall sein:

1) Der Unterricht leite durch Fragen und Aufgaben in planmäßig lückenlos fortschreitender Ordnung zur Erkenntniß und Uebung der betreffenden Wahrheiten an, mit gleicher Rücksicht auf die fortschreitende Entwicklung des Geistes und die Anforderungen, welche der Stoff in wissenschaftlicher Hinsicht macht.

Die Kunst des Lehrens besteht darin, daß man den Schüler anrege, sich selbst zu lehren. Der Unterricht soll nur dazu den äußern

---

*) Die Raumformen- und Raumgrößenlehre in Verbindung mit dem Zeichnungsunterrichte. Zum Gebrauche für Lehrer an Volks- und Gewerbschulen. Zweite vermehrte Auflage. Mannheim bei Fr. Bassermann. 1850.

Anstoß geben. Deßwegen sollen die Auflösungen der Aufgaben nicht vom Lehrer ausgehen, sondern der Schüler soll durch zweckmäßig geordnete Fragen zur Einsicht geführt werden. Alle vom Schüler gefundene Auflösungen müssen angenommen werden; nur soll derselbe gehalten sein, jedes Mal genau den Weg anzugeben, auf dem er zur Einsicht gekommen. Wird sich der Schüler stets bewußt, wie er zur Einsicht gekommen; so wird er, immer weniger der leitenden Hand des Lehrers bedürfend, von Tag zu Tag selbstständiger werden, und es genügt alsdann für einen Schüler, der so nicht nur mit Zahlen operieren, sondern mittelst der Zahlen und Zahlenverhältnisse denken gelernt hat, größtentheils eine planmäßig geordnete Reihe von Fragen und Aufgaben und eine Erklärung der sachlichen Verhältnisse. Der Lehrer gebe daher die Fragen und Aufgaben, wie sie im „Rechenunterrichte" folgen, ohne alle weitere Erklärung; in den meisten Fällen und bei gutbegabten Kindern, deren jede Schule doch immer einige zählt, werden sie zureichen. Ist dies nicht der Fall, so mache man durch Fragen auf die Punkte aufmerksam, welche beim Suchen der Lösung ins Auge zu fassen sind. Erklärungen in vortragender Form, bei welchen die Schüler lediglich dem Gedankengange des Lehrers zu folgen haben, sollen nicht vorkommen: denn es ist für das Kind viel schwerer, sich die Anschauungsweise des Lehrers anzueignen, als von seinem Standpunkte aus, aus den bereits erkannten Wahrheiten die daraus folgende durch Nachdenken aufzusuchen; und es ist durch hinlängliche Erfahrung erprobte Thatsache, daß der ganze Rechenunterricht durch eine lückenlos fortschreitende Reihe von Fragen und Aufgaben ertheilt werden kann. Auch bei den Veranschaulichungen soll sich die Thätigkeit des Lehrers auf die Anleitung zur versinnlichenden Darstellung und fleißige Ueberwachung der kindlichen Thätigkeit beschränken. Soll aber dies möglich sein, und das mechanische An- und Einlernen gänzlich unterbleiben; so müssen die Fragen und Aufgaben zu vielseitiger Durchdringung der Sache anregen und in einem innern Zusammenhange stehen. Bei Nichtbeachtung dieses innern Zusammenhanges werden der Selbstthätigkeit des Schülers unübersteigliche Hindernisse in den Weg gelegt und die Folge davon wird die Rückkehr zum mechanischen An- und Einlernen sein.

2) **Die Aufgaben und Uebungen müssen so beschaffen und geordnet sein, daß aus dem Einzelnen das Allgemeine erwächst.**

Begann man früher mit der Regel und ließ dann nach dieser eine gewisse Anzahl Uebungsbeispiele lösen; so glaubte man später jede Regel entbehren zu können. Beides ist unrichtig; es müssen die einzelnen Wahrheiten bis zu der Fertigkeit geübt werden, daß sich der Schüler des kürzesten Verfahrens, d. h. der Regel mit Bewußtsein bedienen kann, und der Unterricht ist überhaupt nur dann bildend, wenn der Schüler dadurch befähigt wird, sich von dem Einzelnen zu allgemeinen Gesetzen und Wahrheiten zu erheben. Daher nöthige man den Schüler, bei jeder Auflösung in sich zu gehen, über das Wesentliche der Aufgabe und den bei der Auflösung eingehaltenen Gang nachzudenken und dieses in Worten auszusprechen. Manchem Lehrer dünkt vielleicht dieser Weg zu langsam führend; allein es ist gerade umgekehrt, und zudem ist nicht das die Hauptsache, daß das Kind subtrahieren, dividieren, die Zins-, Gesellschafts- und Mischungsrechnungen lösen, sondern daß es seine geistigen Kräfte kennen und gebrauchen, daß es denken*) und das Gedachte deutlich und in reinem Deutsch aussprechen lerne. Das Erstreben dieses Zieles ist auf jeder Stufe, auf den höhern jedoch nur dann möglich, wenn im Anfange nicht durch ein verkehrtes Verfahren die freie Thätigkeit des kindlichen Geistes darniedergehalten worden, oder durch zu schnelles Vorwärtseilen**) das klare Verständniß unmöglich geworden ist; daher stecke man lieber das Ziel des Unterrichtes enger, als daß man versäume, die Denk- und Sprachkraft des Kindes möglichst zu entwickeln und zu üben.

---

*) Daß die Volksschule und die Elementarklassen der höhern Lehranstalten nicht der Ort sind, wo „Denker" gebildet werden, die neue unerhörte Gedanken zu Tage fördern, versteht sich wol von selbst. Das Denken in der Volksschule beschränkt sich größtentheils darauf, daß die Schüler ihrem Lehrer nachdenken. Aber man sorge dafür, daß ein wirkliches Nachdenken zu Stande komme und nicht Alles auf ein Nachmachen und Nachsprechen hinauslaufe. Siehe auch die Vorrede zu meiner Raumformen- und Raumgrößenlehre. S. V. und VII.

**) Vielseitige und tüchtige Uebung ist namentlich beim Rechenunterrichte nöthig, wenn etwas Tüchtiges geleistet werden soll. Leider steht es damit hie und da noch so, daß es fast nothwendig wäre, in der Fortbildungsschule wieder vorn anzufangen; auch ist die Klage, welche man zuweilen von Geschäftsleuten hört, daß die jungen Leute heutzutage weniger fertig rechnen können als früher, nicht ganz ungegründet.

Was die verschiedenen Auflagen dieser Schriften betrifft; so hat der ursprünglich zu Grund gelegte Plan in keiner Hinsicht eine Aenderung erlitten, und es können daher die verschiedenen Auflagen des „Rechenunterrichtes" nebeneinander in einer Schule gebraucht werden.

In den spätern Auflagen des „Rechenunterrichtes" wurde hie und da des leichtern Verständnisses wegen eine Frage eingeschoben, und in der IV. Auflage wurden sämmtliche fremde Ausdrücke, insofern sie nicht als eingebürgert und daher allgemein verständlich betrachtet werden können, durch deutsche ersetzt. Die fremden Benennungen sind in Klammern beigesetzt: in der Volksschule mag sich der Lehrer derselben im letzten Schuljahre abwechselnd bedienen, damit sie die Schüler auch verstehen lernen; in den höhern Lehranstalten können sie durchgängig gebraucht werden. — In der II. Auflage der „Anleitung" habe ich deutlicher und ausführlicher zu sein gesucht, wo ich es nach den gewonnenen Erfahrungen für sachdienlich hielt, z. B. §. 2, §. 7, §. 9, §. 12, §. 13, §. 17 und a. a. O.; außerdem wurden die Regeln für die Zweisatzrechnungen im §. 31 beigefügt.

Die Vertheilung des Lehrstoffes auf die 8 Schuljahre der Volksschule könnte folgendermaßen geschehen:

1. Schuljahr: Behandlung der Grundzahlen, §. 1. (Siehe §. 1, 10 Anm.).
2. Schuljahr: Die zweite Zahlenordnung, das Zuzählen, Abzählen und Vervielfachen der Grundzahlen, §. 2—§. 7 excl.
3. Schuljahr: Das Entvielfachen mit den Grundzahlen, §. 7. Verbindung der 4 Rechnungsarten, §. 8. Das Erbauen der dritten Zahlenordnung. II. Stufe, §. 9. Das Zusammenzählen und Abziehen innerhalb der Zahlenreihe von 1 bis 1000, §. 10 und §. 11.
4. Schuljahr: Erweiterung des Zahlenraumes bis 10000. Das Zusammenzählen, Abziehen und Vervielfachen innerhalb des erkannten Zahlenraumes. II. Stufe, §. 9 — §. 13.
5. Schuljahr: Das Messen und Theilen in dem Zahlenraume bis 10000. Erweiterung des Zahlenraumes bis 1000000. Die 4 Grundrechnungsarten innerhalb des erkannten Zahlenraumes, §. 9 — §. 14. Die 4 Grundrechnungsarten mit mehrfach benannten ganzen Zahlen, §. 14.
6. Schuljahr: Vermischte Aufgaben, §. 15. Das Zerlegen der Zahlen in Faktoren, §. 16. Die Lehre von den Brüchen.

III. Stufe, §. 17 — §. 24. Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen, §. 24.

7. Schuljahr: Erbauung der höhern Zahlenordnungen von Million aufwärts. Zweigliedrige Zweisatzrechnungen: Vorübungen, Aufgaben verschiedenen Inhaltes, Arbeitsrechnungen, Zinsrechnungen, Rabattrechnungen, vermischte Aufgaben. IV. Stufe, §. 25. Mehrgliedrige Zweisatzrechnungen verschiedenen Inhaltes. §. 26, A. Mehrgliedrige Zinsrechnungen. §. 26, B.

8. Schuljahr: Terminrechnungen. §. 26, C. Rabattrechnungen. §. 26, D. Theilungs-, Gesellschafts-, Wechselgeld-, Waaren-, Gewinn- und Verlustrechnungen, Mischungsrechnungen, der Kettensatz, Zinseszinsrechnungen, vermischte Aufgaben. IV. Stufe, §. 27 bis §. 33 incl.

Diese Vertheilung des Unterrichtsstoffes kann jedoch nicht strenge für alle Schulen und alle Verhältnisse maßgebend sein; in manchen Schulen werden die Gränzen überschritten, in andern nicht erreicht werden können. Wenn in gewöhnlichen Landschulen die Schüler bis IV. Stufe §. 26, also dahin kommen, daß sie zweigliedrige Zweisatzrechnungen mit Einsicht und Fertigkeit behandeln können; so wird man sich dabei beruhigen dürfen. Die Fortbildungsschule sei dann in der Wirklichkeit, was sie ihrem Namen nach sein soll.

Die V. Stufe eignet sich nur für diejenigen Lehranstalten, welche über der gewöhnlichen Volksschule stehen.

Möge mein Streben, das stets auf Mitwirkung zur immer allgemeinern Einführung eines naturgemäßen Unterrichtes ging, auch in den neuen Auflagen dieser Schriften nicht verkannt werden, und mögen die Freunde der Schulen denselben eine freundliche Aufnahme schenken.

Ettlingen, im Mai 1844.

Gruber.

Vorrede

zur dritten Auflage.

Das Buch, zu dessen Gebrauche die vorliegende Schrift eine ausführliche Anleitung geben will, hat vor einigen Monaten durch eine fünfte Stufe, welche sich den vier vorhergehenden ergänzend anschloß, eine nicht unbedeutende Erweiterung gewonnen, und in Folge dieser Erweiterung, und weil der Name Elementarschule nicht mehr wie früher gleichbedeutend mit Volksschule genommen wird, den seitherigen Titel: „der Rechenunterricht in der Elementarschule" in den dasselbe genauer bezeichnenden: „der Rechenunterricht in der Volks- und höheren Bürgerschule" umgewandelt. Mit der Erweiterung des „Rechenunterrichtes" hat auch die „Anleitung" an Ausdehnung gewonnen, und selbst in den 4 ersten Stufen manche Zusätze erhalten, wie z. B. §. 15. c., §. 23. b. und c. u. s. w.; außerdem wurden die Decimalbrüche mit Ausführlichkeit behandelt und die nothwendig aufzustellenden Regeln durch römische Zahlzeichen besonders hervorgehoben. Was die Aufstellung von Regeln betrifft, so halte ich dieselben sowol in unterrichtlicher als in erziehlicher Beziehung für nothwendig, was ich schon in der Vorrede zur I. und II. Auflage ausgesprochen habe. In unterrichtlicher Beziehung ist ein fertiges Rechnen und von einer gewissen Stufe an auch die klare Einsicht in die Zahlenverhältnisse ohne die Aufstellung und den Gebrauch der Regeln schlechterdings unmöglich. Der denkende Rechner wird eine Aufgabe auf verschiedene Weise zu behandeln verstehen, aber er soll auch die kürzeste Verfahrungsart kennen, die Regel zu erklären wissen und mit Fertigkeit anwenden können. Zudem ist ohne Einsicht in den Zusammenhang, in dem das zu Erlernende mit dem schon Erlernten steht, jedes klare Verständniß unmöglich, und die Einsicht in diesen innern Zusammenhang ist wieder davon abhängig, daß dem Schüler sein Verhalten bei

der Auflösung der vorangegangenen Aufgaben zum Bewußtsein gekommen ist, und daß er dasselbe in kurzen und bestimmten Worten auszusprechen weiß. Wenn z. B. die Aufgabe gegeben ist: Was kosten 7 ℔, wenn 1 ℔ $^5/_8$ fl. kostet? so findet man, daß 7 ℔, 7 Mal $^5/_8$ fl. kosten; es muß also der Bruch $^5/_8$ mit 7 multiplizirt werden, und der Schüler muß wissen, daß diese Multiplikation durch die Multiplikation des Zählers ausgeführt wird; er muß also die Regel XX. §. 20. kennen. Siehe auch §. 10. I. a. 2.

Von noch größerer Wichtigkeit ist jedoch die pädagogische Seite. Jede Schule hat nicht nur ein gewisses Maß von Kenntnissen der Jugend zu verabreichen und dadurch bei ihr eine bestimmte reale Bildung zu vermitteln, sondern vor Allem zu einer bestimmten Bildungsstufe der Humanität zu führen und zwar zu derjenigen, zu welcher die Jugend nach Maßgabe ihrer Anlagen berufen, und welche sie dem Grade ihrer geistigen Entwicklung nach zu betreten fähig ist. Die Jugend soll nicht bloß zur äußeren Wohlanständigkeit, sondern auch zum Gehorsam, zur Wahrheitsliebe, zum Gemeinsinn, zur Heilighaltung des Gesetzes, zur treuen Pflichterfüllung und zur Achtung der Rechte Anderer erzogen werden. Soll der Unterricht ein Mittel zur Erziehung sein, so muß durch ihn der Sinn für alle diese Tugenden geweckt und gepflegt, und der Schüler an Ausübung derselben gewöhnt werden. Namentlich soll die Jugend mit der inneren Achtung vor dem Gesetze und mit der Neigung zum Gehorsam gegen dasselbe in das bürgerliche Leben entlassen werden, und jede Schule soll so organisirt sein, daß nicht der Einzelne in ihr verschwindet, sondern als ein wesentliches Glied dieser Gemeinschaft sich erkennt.

Es soll daher im Anfange einem jeden Schüler überlassen bleiben, eine Aufgabe auf die ihm anschaulichste Weise zu lösen, jedoch mit der Verpflichtung, über die Art seines Verfahrens Rechenschaft zu geben, damit es den übrigen Schülern möglich werde, das eingehaltene Verfahren zu begreifen und vorkommenden Falles denselben Weg einzuschlagen. Sobald die Schüler die verschiedenen Auflösungsarten kennen gelernt und begriffen haben, werden sie aufgefordert, die leichteste und kürzeste Art herauszusuchen, welche sodann als Regel aufgestellt wird. Das Rechnen nach Regeln findet seine Anwendung, sobald der Schüler sich die in einer Aufgabe gegebenen Zahlen nicht mehr mit Leichtigkeit vorstellen kann. Die einmal aufgestellte Regel muß von allen Schülern pünktlich befolgt, aber auch die Richtigkeit

jedes allgemeinen Satzes recht oft an einzelnen Beispielen nachgewiesen werden.

Es wird nun hinlänglich Gelegenheit geben, dem Schüler die Wichtigkeit der Festhaltung der Regel zur Anschauung zu bringen und ihm begreiflich zu machen, daß nur Derjenige vor Verirrungen bewahrt ist, der sich an das Gesetz hält. Das aber ist die Hauptsache, dem Zöglinge den hohen Werth aller obengenannten Tugenden fühlbar zu machen, und in ihm Achtung und heilige Scheu für dieselben zu erzeugen; denn die Meinung ist irrig, man könne die Jugend allein durch moralischen und religiösen Unterricht, der als solcher nur Vorstellungen geben kann, sittlich gut machen. Es ist zwar von hoher Wichtigkeit, deutliche, klare und richtige Vorstellungen der Seele des Kindes einzupflanzen, da die in uns thätigen Vorstellungen einen großen Einfluß auf unser Fühlen und Wollen üben; aber man darf nicht hoffen, durch diesen Unterricht allein das Thun und Lassen des Zöglinges zu bestimmen. Aller Unterricht, ja das ganze Schulleben muß den moralischen und religiösen Unterricht unterstützen, ja ihm die Grundlage geben; sonst läuft man Gefahr, in's Leere zu bauen, nur Worte zu geben, höchstens Begriffe, aus denen in der Regel kein Begehren und kein Widerstreben erwächst. Der Lehrer sehe aber auch bei Beurtheilung eines Schülers nicht allein auf dessen Wissen, sondern vorzüglich auf dessen Fleiß, Aufmerksamkeit, dessen Gewissenhaftigkeit in Beobachtung aller gegebenen Vorschriften. Der Gedankenlosigkeit und dem leeren Geschwätze trete er mit Entschiedenheit entgegen; der Möglichkeit des Vergessens hingegen trage man Rechnung.

In manchen Schulen legt man besondern Werth darauf, die Schüler fortwährend in ihren Auflösungen auseinander zu halten und verschmäht es, bis zur Regel aufzusteigen. Die Lehrer, welche das Rechnen nach Regeln für verwerflichen Mechanismus halten, sollten doch bedenken, daß sie auf diese Weise das Suchen selbstständiger, abgetrennter Wege, das in unserer Zeit ohnehin zur Krankheit geworden ist, steigern und nähren, und eines der wichtigsten Bildungselemente unbenützt liegen lassen. Denn der Unterricht ist vorzüglich dann bildend, wenn er befähigt, sich von dem Einzelnen zu allgemeinen Gesetzen und Wahrheiten zu erheben, und das Schulleben hat nur Werth, wenn sich der Schüler als Glied einer Gemeinschaft fühlt und sich allen in dieser Gemeinschaft geltenden Gesetzen zu unterwerfen gewöhnt

wird. Die Hauptbedeutung der Schule beruht darin, daß ihn ihr ein Leben in der Gemeinschaft möglich ist. Wenn die Schule dieses Leben nicht fördert und pflegt, so gibt sie sich in ihrer Wesenhaftigkeit und Nothwendigkeit auf. So verwerflich es daher ist, wenn der Schüler nicht an ein umsichtiges und selbstständiges Arbeiten gewöhnt, wenn er Alles in der Form lernen muß, in der es ihm von dem Lehrer übergeben wird; so wenig kann es gutgeheißen werden, wenn sich die Schule nicht eines jeden Unterrichtes als eines Erziehungsmittels bedient, um den Zögling zum sittlichen und verständigen Handeln in seiner künftigen Lebensstellung geneigt und befähigt zu machen. Eine Lehrmethode wird daher auch nur in dem Grade Anerkennung verdienen, als sie Bildungsstoffe, seien es intellektuelle oder ethische oder ästhetische, aus dem Gegenstande des Wissens frei zu machen und dem Schüler zuzuführen weiß. Daher ist ein Unterricht, bei dem kein bestimmtes Lehrbuch zu Grunde gelegt ist, immer eine bedenkliche Sache, und die Einhaltung eines festen Lehrganges sollte namentlich beim Rechenunterrichte unnachsichtliche Forderung sein.

Ueber die Absteckung und Begränzung des Lehrgebietes mit Rücksicht auf die Volksschule und die höhern Lehranstalten ist bereits in der Vorrede zu den beiden ersten Auflagen, und über Lehrgang und Lehrform im Buche selbst das Nöthige gesagt worden. Es soll aber hier noch besonders darauf aufmersam gemacht werden, daß in der Volksschule und in den Elementarklassen der höheren Lehranstalten sich fast alle Urtheile und Schlüsse unmittelbar an die Anschauung anschließen müssen. Der Elementar- und Volksschüler braucht daher nicht, wie der Zögling der höheren Lehranstalten, die Sätze und Regeln in ihrer Allgemeinheit auszusprechen, es genügt bei ihm, wenn dieselben in ihrer Fassung nur für den vorliegenden Fall Geltung haben; auch hat der Elementar- und Volksschüler die Richtigkeit der ausgesprochenen Regeln nur an einzelnen Beispielen anschaulich zu machen, während dem Zögling der höheren Bürgerschulen und Gymnasien die allgemeinen Beweise hiefür nicht zu erlassen sind. Einige Beispiele werden dies deutlicher machen.

Elementar- und Volksschule.	Höhere Bürgerschule und Gymnasium.
1) Wenn man den Theiler und die Theilungszahl mit 2 vervielfacht	1) Ein Quotient bleibt unverändert, wenn man seinen Dividen-

(oder durch 2 theilt), so bleibt der Theil unverändert. Z. B. 12 : 6 = 2; 24 : 12 = 2; 6 : 3 = 2.

2) Wenn man den Zähler eines Bruches mit 2 vervielfacht, so zeigt der dadurch entstehende Bruch den doppelten Werth des früheren an.

3) Ein Bruch wird mit einem Bruche vervielfacht, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner vervielfacht. Z. B. $2/3 \times 4/5 = 8/15$.

Ich kann die Richtigkeit dieser Regel entweder an Strichen oder auf folgende Weise anschaulich machen.

Wenn man $4/5$ zwei Mal nimmt, so erhält man 2 × 4 Fünftel = $8/5$. Der Vervielfacher ist aber nicht 2, sondern $2/3$, also eine Zahl, welche dreimal so klein ist, als 2. Wenn aber der Vervielfacher drei Mal so klein wird, so wird auch das Vielfache drei Mal so klein. Man macht $8/5$ drei Mal so klein, wenn man den Nenner mit 3 vervielfacht; also erhält man $8/15$.

dus und Divisor entweder mit einerlei Zahl multiplizirt oder durch einerlei Zahl dividiert.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a : m}{b : m}.$$

2) Multiplikation des Zählers = Multiplikation des Bruchwerthes.

3) Ein Bruch wird mit einem Bruche multiplizirt, wenn man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividirt.

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}.$$

Wenn ich den Zähler des Multiplikators als Multiplikator anschaue, so wird die Aufgabe auf den Fall zurückgeführt: einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplizieren. Dieses wird ausgeführt durch Multiplikation des Zählers. Da aber der gegebene Multiplikator keine ganze Zahl, sondern so vielmal so klein ist, als der Nenner desselben anzeigt; so muß auch das vorhin erhaltene Produkt durch den Nenner des Multiplikators dividiert werden, und dies wird ausgeführt durch Multiplikation des Nenners. Es gibt also das Produkt der Zähler den Zähler des Produkts, und das Produkt der Nenner den Nenner des Produkts.

Man vereinigt sich heut zu Tage immer mehr in der Ansicht, daß unsere Jugend künftighin nicht nur unterrichtet, sondern auch erzogen werde und daher der Schule die Verpflichtung zur Erziehung übertragen werden müsse, weil sonst der Unterricht keine wohlthätige Rückwirkung auf die sittliche und religiöse Stärkung der Familie und somit auf die Stärkung des Staates habe, sondern vielmehr zu einer auflösenden und zerstörenden Kraft werde. Wie es nun eine der

wichtigsten Angelegenheiten der bürgerlichen Gesellschaft ist, daß die Schule künftighin nicht bloß Unterrichtsanstalt sei, sondern immer mehr in der Bildung des Menschen zum Menschen ihre Aufgabe finde; so liegt es auch im hohen Interesse des Lehrerstandes, diese Forderung der Zeit zu begreifen und ihr Genüge zu leisten. Möge es mir daher gelungen sein, zur praktischen Lösung dieser wichtigen Frage durch das Buch, auch in seiner gegenwärtigen Gestalt, einen kleinen Beitrag geliefert zu haben!

Ettenheim, im Dezember 1850.

Gruber.

Inhaltsverzeichniß.

Seite

I. Stufe.

1) Behandlung der Grundzahlen, §. 1.
Das Anschauen und Benennen der Zahlen 1
Das Zählen aus der Vorstellung 2
Das Darstellen der Zahlen durch Striche 3
Das Zerlegen der Zahlen und das Zuzählen innerhalb der erkannten Zahlenreihe 4
Das Abzählen 6
Das Vervielfachen 7
Das Entvielfachen 8
Verbindung der Rechnungsarten 8
Kenntniß der Ordnungszahlen 8
Vermischte Aufgaben 9
2) Erzeugung und Erkenntniß der Zahlen von 10 bis 100, §. 2 . . . 10
3) Bezeichnung der Zahlen von 1 bis 100 mit Ziffern, §. 3 12
4) Das Zuzählen der Grundzahlen zu den Zahlen der 2 ersten Ordnungen, §. 4. 14
5) Das Abziehen der Grundzahlen von den Zahlen der 2 ersten Ordnungen, §. 5. 16
6) Das Vervielfachen der Grundzahlen, §. 6. 17
7) Das Entvielfachen mit den Grundzahlen innerhalb der Zahlenreihe von 1 bis 100, §. 7. 19
8) Vermischte Aufgaben, §. 8. 22

II. Stufe.

1) Erbauung der dritten und folgenden Zahlenordnungen, §. 9. . . 22
2) Das Zusammenzählen größerer Zahlen, §. 10. 25

Seite
3) Das Abziehen größerer Zahlen, §. 11. 31
4) Das Vervielfachen größerer Zahlen, §. 12. 37
5) Das Entvielfachen mit größeren Zahlen, §. 13. 51
6) Die 4 Rechnungsarten mit mehrfach benannten ganzen Zahlen, §. 14.
I. Das Zusammenzählen 69
II. Das Abziehen 73
III. Das Vervielfachen 80
IV. Das Entvielfachen 82
7) Vermischte Aufgaben, §. 15. 89
8) Das Zerlegen der Zahlen in Faktoren und das Anfsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen, §. 16. 94
9) Sätze über die Theilbarkeit der Zahlen 99
10) Auffuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zweier Zahlen . 101

III. Stufe.

1) Die Lehre von den Brüchen, §. 17.
a) Erzeugung, Benennung, Darstellung und Bezeichnung der Brüche 103
b) Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in Brüche, und uneigentlicher und unächter Brüche in ganze oder in gemischte Zahlen 109
c) Ein Quotient, dessen Theilungszahl und Theiler ganze Zahlen sind, der aber nicht selbst eine ganze Zahl ist, heißt ein Bruch. Verwandlung niederer Sorten in höhere und höherer Sorten in niedere 111
d) Auffuchung, von welcher Zahl eine gegebene Zahl ein bestimmter Theil ist 112
e) Fortgesetzte Bestimmung des Größenverhältnisses gegebener Zahlen 113
f) Zusammengesetzte und zehntheilige Brüche 114
g) Vergleichung des Werthes der Brüche 117
h) Folgerungen. Wiederholungen 118
2) Verwandlung der Bruchform ohne Abänderung des Werthes der Brüche, §. 18.
I. Das Erweitern der Brüche 119
II. Das Abkürzen der Brüche 125
III. Das Gleichnamigmachen der Brüche 129
3) Das Zusammenzählen mit Brüchen, §. 19. 131
4) Das Abziehen mit Brüchen, §. 20. 133
5) Das Vervielfachen mit Brüchen, §. 21. 135
6) Das Messen und Theilen mit Brüchen, §. 22. 141
7) Vermischte Aufgaben, §. 23. 151
8) Von den Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen, §. 24. 156

Seite

IV. Stufe.

1) Zweisatzrechnungen. Vorübungen, §. 25. 160
A. Aufgaben verschiedenen Inhalts 168
B. Arbeitsrechnungen 171
C. Zinsrechnungen 171
D. Rabattrechnungen 174
E. Vermischte Aufgaben 178
2) Mehrgliedrige Zweisatzrechnungen, §. 26.
A. Aufgaben verschiedenen Inhalts 180
B. Zinsrechnungen 183
C. Terminrechnungen 187
D. Rabattrechnungen 194
3) Theilungs-Rechnungen, §. 27. 196
4) Gesellschafts-Rechnungen, §. 28. 202
5) Wechselgeld-, Waaren-, Gewinn- und Verlust-Rechnungen, §. 29. 208
6) Mischungs-Rechnungen, §. 30. 213
7) Zweisatzregel; Kettenregel; Aufgaben, in denen der Fragesatz durch eine Reihe anderer Sätze bedingt ist, §. 31. 225
8) Zinseszinsrechnungen, §. 32. 238
9) Vermischte Aufgaben, §. 33. 242

V. Stufe.

1) Praktische Aufgaben in zehntheiligen Brüchen, §. 34.
a. Verwandlung höherer Einheiten in niedere (Resolution) 257
b. Verwandlung niederer Einheiten in höhere (Reduktion) 258
c. Verwandlung des zehntheiligen Längen-, Flächen- und Körpermaßes in gemeines Maß, und umgekehrt 258
2) Vergleichung der badischen Maße, Gewichte und Münzen mit den französischen, §. 35.
a. Längenmaß 260
b. Flächenmaß 260
c. Körpermaß 261
d. Hohlmaß 262
e. Gewicht 262
f. Feldmaß 262
g. Brennholz- und Kohlenmaß 262
h. Münzen 263
3) Aufgaben über Maße und Gewichte. §. 36. 263
4) Aufgaben über das verhältnißmäßige Gewicht der Körper, §. 37. 265
5) Aufgaben über das Münzwesen, §. 38.
a. Gehalt der Münzen 272
b. Gegenseitiger Werth der Münzen 274
c. Agio-Berechnungen 276

Seite

6) Wechsel-Rechnungen, §. 39.
   a. Parirechnungen 279
   b. Wechselreduktionen 280
   c. Arbitragerechnungen 280
   d. Wechselkommissions-Rechnungen 284
7) Vermischte Aufgaben, §. 40. 285

I. Stufe.

§. 1.

Behandlung der Grundzahlen (1 — 10).

1) Das Anschauen und Benennen der Zahlen. Der Mensch erhält dadurch Zahlvorstellungen, daß die ihn umgebenden Gegenstände mittelst der Sinne Eindrücke auf ihn machen. Die ersten Wirkungen dieser Eindrücke sind dunkle Vorstellungen von Einheit und Vielheit; nach und nach werden diese Vorstellungen deutlicher, die Einheit wird von der Vielheit unterschieden, und damit ist die Möglichkeit aller übrigen Zahlvorstellungen gegeben.

Soll der Unterricht im Rechnen naturgemäß sein, so muß also auch das Zählen zuerst an sichtbaren Dingen geübt werden. Da nun die Aufmerksamkeit des Kindes in der Schule im Anfange vorzugsweise auf die Personen im Schulzimmer gerichtet ist, so soll das Anschauen und Benennen der Zahlen zuerst an Kindern geübt werden. Die Reihen von eins bis fünf, und dann von fünf bis zehn müssen vor den Augen des Kindes entstehen. Zu diesem Behufe lasse der Lehrer ein Kind heraustreten, deute auf dieses Kind und frage: Wie viele Kinder sehet ihr hier? Sodann lasse er ein zweites Kind hinzutreten, und wiederhole diese Frage; nun lasse er das zweite Kind wieder an seinen Platz sitzen, damit die Kinder von 1 bis 2 und wieder zurückzählen lernen. Der Lehrer zeige abwechselnd auf 1 Kind und auf beide Kinder, und lasse von den Kindern die Zahl aussprechen; auch umgekehrt spreche er die Zahl, und lasse die Kinder die gezählten Gegenstände zeigen.

Zu den 2 ersten Kindern wird ein drittes gestellt und das Zählen von 1 bis 3 und zurück ebenso geübt; sodann lasse man

ein viertes hinzutreten und fahre auf dieselbe Weise fort, bis die Kinder zuerst bis auf 5 und sodann bis auf 10 zählen können, und auf diese Weise die Zahlen von 1 bis 10 anschaulich aufgefaßt haben.

Anm. Der Lehrer stelle nie eine Frage, ehe alle Kinder still und aufmerksam sind, und rufe erst dann zur Beantwortung auf, wenn die Frage gegeben ist, welche immer laut, deutlich und scharf betont gesprochen werden muß. Zuerst soll jedes Kind einzeln zählen, und nur nach und nach dürfen diejenigen Kinder, welche einzeln fertig gezählt und alle Fragen richtig beantwortet haben, gemeinschaftlich zählen und antworten. Die Aufforderung zur Beantwortung braucht nicht immer mit Nennung des Namens, sie kann auch durch ein Zeichen oder einen Wink geschehen. Kein Kind soll lange ungefragt sitzen bleiben.

Das Zählen von 1 bis 10 wird nun auch an andern Gegenständen, welche die Kinder mit ihren Sinnen im Augenblicke des Zählens wahrnehmen können, geübt. Solche Gegenstände sind: die Schulbänke, die Stühle, Tische, Tafeln, Wände, Fenster, Fensterscheiben im Schulzimmer, die Bücher auf dem Tische, die Tischfüße, Tischecken u. s. w., und vorzüglich auch die gleichartigen Theile des menschlichen Körpers: die Finger, die Augen, die Ohren, die Hände u. s. w.

Der „Rechenunterricht" enthält solche Fragen, zu denen natürlich viele ähnliche gebildet werden müssen.

Anm. Bei dem Rechenunterrichte sind stets zwei Fälle zu unterscheiden: es sollen entweder neue Vorstellungen in der Seele des Kindes erzeugt, oder es soll das Kind veranlaßt werden, die gewonnenen Vorstellungen anzuwenden. Im ersten Falle *) muß immer von der Anschauung, und zwar beim ersten Unterrichte von der Anschauung wirklicher Dinge ausgegangen, und dieses Anschauen lange fortgesetzt werden, da auf ihm alle spätere Erkenntniß beruht. Wenn Kinder später im Rechnen keine Fortschritte machen, so fehlt es ihnen in der Regel an deutlichen Zahlvorstellungen; diese werden aber nur gewonnen durch lange fortgesetztes Anschauen der Zahlen an wirklichen Gegenständen. Die Anschauungskraft, d. i. die Kraft, vermöge welcher die Dinge außer uns Eindrücke auf uns machen und wir diese Eindrücke wahrnehmen, ist die Kraft des Erkenntnißvermögens, welche zuerst thätig wird; sie muß daher auch bei jedem Unterrichtsgegenstande zuerst geübt werden.

2) Das Zählen aus der Vorstellung. Haben die Kinder

---

*) Siehe auch §. 10 I. a. 2).

das Zählen von eins bis zehn an solchen Gegenständen, die sie anschauen können, bis zur Fertigkeit geübt; so sollen sie nun auch solche Gegenstände zählen, die sie schon gesehen haben, aber im Augenblicke des Zählens nicht (sinnlich) anschauen, sondern sich nur vorstellen können. Man stelle daher die folgenden und ähnliche Fragen: Wie viele Brüder hast du? Wie viele Schwestern? Wie viele Geschwister? Wie viele Zimmer sind in eurem Wohnhause? Wie viele Fenster sind in eurer Wohnstube? Wie viele Stühle, Tische u. s. w. stehen darin? Was hast du nun angegeben? (Ich habe angegeben, wie viele Stühle (Tische 2c.) in unserm Wohnzimmer stehen.) — Mit welchem Worte hast du gesagt, wie viele Stühle in eurem Wohnzimmer stehen?

Anm. Man fordere die Kinder auf, diese Gegenstände wirklich zu Hause zu zählen.

Zähle die Kirchen, die Thürme, die Thore des Orts! Wie viel Füße hat ein Pferd? Nenne Thiere, welche nur 2 Füße haben! Wie viele Flügel hat ein Huhn? Wie viele Räder hat ein Wagen? Nenne die einzelnen Wochentage und zähle, wie viele es sind! Wie viel Uhr schlägt es eine Stunde nach 8 Uhr? Wie viel hat es eine Stunde vor 4 Uhr geschlagen?

Anm. Wie es für die Bildung des Menschen überhaupt von großer Wichtigkeit ist, daß der Seele des Kindes deutliche, klare und richtige Vorstellungen eingepflanzt werden, weil die uns thätigen Vorstellungsmassen einen großen Einfluß auf unser ganzes Fühlen und Wollen üben; so ist es auch hier schlechterdings nothwendig, daß der Schüler klare und richtige Zahlvorstellungen besitze. Wenn nun solche Vorstellungen ohne vorangegangene Anschauung der Zahlen an wirklichen Dingen unmöglich sind, und überhaupt fleißige Uebung der Anschauungskraft eine unentbehrliche Bedingung zur Bildung der Vorstellungskraft ist; so muß doch auch das Vorstellungsvermögen unmittelbar geübt, d. h. es muß das Kind angeleitet werden, die Gegenstände, von denen die Seele Eindrücke erhalten hat, auch innerlich anzuschauen, gleichsam im Geiste vor sich hinzustellen. Hiezu dienen die oben angegebenen Uebungen.

3) Das Darstellen der Zahlen durch Striche. Die Darstellung soll der Ausdruck der Vorstellung sein; es kann daher nur Jeder für sich, nicht aber für einen Andern darstellen, da Jeder nur Das darstellen kann, was er sich selber vorstellt. Demnach hat nicht der Lehrer, sondern der Schüler die Zahlen-

reihe von 1 bis 10 mit Strichen darzustellen; der Lehrer hat nur die Länge und die Richtung der Striche *) zu bestimmen. Haben die Schüler versucht, die Zahlen durch Striche darzustellen; so kann der Lehrer es auch an der Wandtafel thun, damit die Schüler sehen, wie man die Zeichen wohlgeordnet untereinander stellt. Durch das Darstellen der Zahlen gibt das Kind Rechenschaft von der Richtigkeit und Klarheit seiner Vorstellungen. Von hoher Wichtigkeit ist es auch, daß die Schüler stets angehalten werden, in Worten auszusprechen, was sie gethan haben. Z. B. Wir haben zu 3 Strichen noch einen Strich gemacht. Oder: Wir haben 5 Striche neben einander gestellt.

Anm. So wie beim Anschauen der Zahlen künstliche Mittel, z. B.: Stäbe, zylinderförmige kleine Rollen, die Einheitstafel, die sogenannte russische Maschiene u. s. w. ungeeignet sind; so verdienen beim Darstellen der Zahlen die Striche weitaus den größten Vorzug vor allen andern Darstellungsmitteln. Daß manche Verfasser von Rechenbüchern einen so großen Werth auf Wandtafeln legen, auf welchen die Zahlen mittelst Tupfen oder Ringen angedeutet sind, beruht auf einer Verwechselung von Veranschaulichungsmitteln und Darstellungszeichen.

4) Das Zerlegen der Zahlen und das Zuzählen innerhalb der erkannten Zahlenreihe. Es ist ein Unterschied zwischen Zählen und Zuzählen; letzteres ist ein mehr selbstthätiger Akt, als das Zählen. Die Kinder haben 1, 2, 3 . . . 10 Dinge angeschaut und benannt, d. h. sie haben gezählt; sie haben auch die Zahlen mit Strichen dargestellt, wodurch ihre Zahlvorstellungen an Klarheit und Sicherheit gewannen, und der Lehrer sich überzeugen konnte, ob diese Zahlvorstellungen auch wirklich in der Seele des Kindes erzeugt sind. — Nun leite man die Kinder zur Erkenntniß der gewonnenen Zahlvorstellungen an, was durch das sogenannte Zerlegen der Zahlen geschieht; dann erst kann vom Zuzählen, Abzählen u. s. w. die Rede sein, und der Lehrer bedenke wohl, daß die bisherigen Uebungen die Grundlage aller übrigen bilden und eile daher ja nicht!

---

*) Daß im „Rechenunterrichte" die Striche eine schräge Richtung haben, wurde nicht durch den Verfasser veranlaßt.

Man übe zuerst das Zuzählen der Zahl 1: eins und eins sind zwei, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, 4 + 1 = 5, 5 + 1 = 6, 6 + 1 = 7 u. s. w. bis zehn; hierauf lasse man das Zerlegen der Zahl 2 und das Zuzählen dieser Zahl, alsdann das Zerlegen der Zahl 3 und das Zuzählen der Zahl 3, und so fort das Zerlegen und Zuzählen der übrigen Zahlen innerhalb der Zahlenreihe von 1 bis 10 folgen.

Dem Zuzählen einer Zahl muß immer das Zerlegen dieser Zahl vorangehen. So muß das Kind z. B. wissen, daß man statt zwei, eins und eins sagen kann, ehe es die Zahl zwei zuzuzählen im Stande ist. Weiß es aber, daß 2 = 1 + 1 ist, und kann es 1 zuzählen; so wird es auch ohne weitere Beihülfe des Lehrers 2 zuzählen können. Man übe das Zerlegen der Zahlen in einer bestimmten Ordnung und außer dieser Ordnung: das Kind muß z. B. die Zahl 6 schnell in 5 + 1, 4 + 2, 3 + 3, 2 + 4, 1 + 5, 2 + 2 + 2, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 zerlegen, und eben so schnell Fragen, wie: 4 und welche Zahl sind zusammen = 6? beantworten können. Die Fragen, durch welche die Schüler zum Zerlegen und Zuzählen der Zahlen anzuleiten sind (denn daß der Schüler auf jeder Stufe durch zweckmäßige Fragen und nicht durch Vorsprechen zur Einsicht geführt werden müsse, ist schon in dem Vorwort gesagt worden), finden sich entweder im „Rechenunterrichte" oder sind leicht nach den darin enthaltenen zu bilden. Wichtig ist es, die Schüler zu gewöhnen, die Aufgaben sich durch Darstellung der Zahlen mit Strichen*) anschaulich deutlich zu machen; z. B. die Frage: wie viel sind 3 und 2? hat sich der Schüler, bevor er die Antwort gibt, so anschaulich zu machen:

| | | | |

Damit der Schüler gewöhnt werde, eine Aufgabe mit Strichen darzustellen, werden zuerst solche Aufgaben diktiert. Z. B.: Machet 3 und 2 Striche auf eure Schiefertafel! Dabei gewöhne man die Schüler, die zuerst ausgesprochene Zahl links,

---

*) Die Zeichen + und = sollen im ersten Schuljahre noch nicht gebraucht werden.

die zweite etwas entfernt rechts zu stellen. Auch dem Zerlegen der Zahlen soll dieses Diktieren vorangehen. Soll z. B. der Schüler die Zahl 5 in 4 und 1 zerlegen lernen; so lasse man ihn auf seine Tafel links 4, rechts davon 1 Strich stellen, und frage: Wie viele Striche hast du links, wie viele rechts davon auf deine Tafel gezeichnet? Wie viele Striche sind dies zusammen? 4 Striche und 1 Strich sind also so viel, als wie viele Striche? Und wie kann man sagen statt 5 Striche? Auf dieselbe Weise verfahre man, wenn die Zahl 5 in 3 und 2, oder in 2 und 3 u. s. w. zerlegt werden soll.

Sobald die Schüler die Zahlen mit Fertigkeit in ihre Bestandtheile zerlegen können, werden sie angehalten, darauf zu achten, ob diese Theile einander gleich oder ungleich sind. Man frage: Wie kann man sagen statt 2? In wie viele Theile hast du die Zahl 2 zerlegt? Wie heißen diese Theile? Sind diese Theile einander gleich? Zerlege die Zahl 3 in 3 gleiche Theile! Zerlege die Zahl 3 in 2 Theile! Sind diese 2 Theile auch einander gleich? Sind 3 und 3 gleiche Zahlen? Sind 3 und 4 gleiche oder ungleiche Zahlen? Nenne gleiche Zahlen! Können 2 gleiche Zahlen zusammen so viel betragen, als 2 ungleiche? —

Auf diese Weise werden die Schüler einsehen, daß die Zahlen einander gleich sind, wenn sie aus gleich viel Einheiten bestehen. Man verwechsle aber nicht gleiche Zahlen mit geraden Zahlen, von welchen jetzt noch nicht die Rede zu sein braucht.

5) Das Abzählen. Wenn das Zerlegen und Zuzählen hinlänglich geübt ist; so wird das Abzählen keine Schwierigkeiten bieten, sobald die Kinder die Ausdrücke: „hinwegnehmen" und „weniger" verstehen. Diese Ausdrücke müssen den Kindern ganz geläufig werden; man lasse daher öfters dieselbe Wahrheit so sprechen, daß das eine Mal der Ausdruck „hinwegnehmen", das andere Mal der Ausdruck „weniger" gebraucht wird. Z. B. Wenn man von fünf, zwei hinwegnimmt; so bleiben drei. Oder: Fünf weniger zwei, bleiben drei. Die abgekürzte Redeweise: „2 von 5 bleiben 3" vermeide man jetzt noch. Auch beim Abzählen sollen die Kinder angehalten werden, jede Aufgabe mit Strichen darzustellen.

Anm. Es kann nicht oft genug wiederholt werden, wie wichtig es ist, die Kinder schon bei diesen einfachen Uebungen des Zerlegens, des Zuzählens und des Abzählens zu gewöhnen, jedesmal Das in Worten auszusprechen, was sie gethan haben. Jeder Unterricht, mithin auch der Rechenunterricht, soll zu gleicher Zeit Sprachunterricht sein. Die Kinder werden z. B. auf dieser Stufe angeleitet, folgende Sätze zu sprechen: Wir haben 7 Striche gemacht und von diesen 7 Strichen wieder 2 hinweggelöscht. Wenn man von 7 Strichen 2 Striche hinwegnimmt, so bleiben noch 5 Striche. — Durch dieses Sprechen kommt Klarheit und Ordnung in die Vorstellungen, und es ist zugleich das sicherste Mittel, den Schüler zum Bewußtsein seines Verfahrens zu führen.

6) Das Vervielfachen. Zuerst soll das Kind den Ausdruck Mal verstehen lernen; auch dies geschieht am besten durch Fragen. Z. B. Was hat man am Kopfe nur ein Mal? Was zwei Mal? Nenne Dinge, welche sich in diesem Zimmer nur ein Mal befinden! Wie vielmal hast du einen Finger an der Hand? u. s. w. Hierauf wird jede der erkannten Zahlen einmal, die Zahlen von 1 bis 5 zweimal, die Zahlen 1, 2, und 3 dreimal, die Zahlen 1 und 2 viermal und fünfmal genommen. Die Vielfache werden zuerst an wirklichen Dingen geschaut und dann jedes Mal von den Kindern mit Strichen dargestellt. Soll z. B. erkannt werden, daß $2 \times 3 = 6$ ist; so lasse der Lehrer zuerst 3 Kinder heraustreten, in eine Reihe stehen, und frage: Wie viele Kinder stehen da? Wie vielmal 3 Kinder? Er lasse nun noch 3 Kinder heraustreten und in dieselbe Reihe, aber in einiger Entfernung von den 3 ersten stehen, und frage: Wie viele Kinder sind jetzt noch zu den ersten 3 Kindern herausgekommen? Wie vielmal 3 Kinder sind noch hinzugekommen? Wie vielmal 3 Kinder stehen nun in dieser Reihe? Zweimal 3 Kinder sind wie vielmal 1 Kind?

Der Lehrer stelle ebenfalls zweimal 3 Striche, wie ||| ||| hier rechts auf die Wandtafel und frage, auf diese Striche deutend: Wie vielmal eins? Sodann deute er wieder auf diese Striche und frage: Wie vielmal drei? Nun werden beide Anschauungen zusammengefaßt in der Frage: Sechsmal eins sind wie vielmal drei? Die Schüler antworten: Sechsmal eins sind zweimal drei.

Mache Jeder zweimal 3 Striche auf seine Tafel!

Eben so werden die übrigen Aufgaben in der Ordnung, wie sie im „Rechenunterrichte“, I. Stufe, §. 1. d. angegeben sind, behandelt.

7) Das Entvielfachen.*) Ist das Vervielfachen auf die angegebene Weise geübt worden, so ist dadurch auch schon das Entvielfachen begründet; denn weiß das Kind, daß 4×1=2 × 2, so wird es auch leicht einsehen, daß man da, wo 4 sind, 2 zweimal hinwegnehmen kann. ||, ||.

Die beim Entvielfachen üblichen Ausdrücke (wie: 2 ist in 4 zweimal enthalten, oder 4 durch 2 getheilt = 2) gehören noch nicht hierher.

Auch beim Vervielfachen und Entvielfachen sollen die Kinder jede Aufgabe mit Strichen darstellen.

8) Verbindung der Rechnungsarten. Sobald das Abzählen geübt ist, wird es mit dem Zuzählen verbunden; eben so wird das Vervielfachen mit dem Zu- und Abzählen, und das Entvielfachen mit dem Vervielfachen, Zu- und Abzählen verbunden, z. B. 8 × 1 + 2 sind wie vielmal 5? 7 × 1 — 3 sind wie vielmal 2? 2 × 2 und 3 × 2 sind wie vielmal 5? 6 × 1 + 4 — 3 sind wie vielmal 3? Man vermeide jedoch alle zu verwickelten Aufgaben.

9) Kenntniß der Ordnungszahlen. Der Lehrer stelle 10 Kinder in eine Reihe; nachstehende Buchstaben mögen die Namen der Kinder bedeuten:

A. B. C. D. E. F. G. H. I. K.

Welches ist der erste Knabe (das erste Mädchen) dieser Reihe?

Welches der zweite, dritte, vierte u. s. w. dieser Reihe?

Der wie vielte Knabe ist **B.**, wenn man bei **A.** anfängt zu zählen?

Der wie vielte ist **B.**, wenn man von **K.** anfängt zu zählen?

Wie heißt das fünfte Kind von **A.** angefangen?

Zeige das dritte Kind von **K.** angefangen!

Kommt es hier auf die Ordnung an, in der man anfängt zu zählen?

Daß man diese Zahlen deßwegen Ordnungszahlen nennt, weil es auf die Ordnung ankommt, in der man anfängt zu zählen, wird erst später bemerkt.

---

*) Ueber diese Benennung siehe §. 7.

10) **Vermischte Aufgaben.** Den Schluß machen vermischte Aufgaben, wie sie am Ende des §. 1 im „Rechenunterrichte" vorkommen. Bei jeder Aufgabe sollen die Kinder den Sinn der Aufgabe in Worten deutlich aussprechen, und eben so angeben, wie sie bei Lösung derselben verfahren sind. Ein Beispiel in Fragen und Antworten mag ungefähr andeuten, wie der Lehrer dabei zu Werke gehen kann. Sollten die Kinder auch nicht gerade immer dieselbe Antwort geben, wie sie hier folgt; so wird sich der einigermaßen geübte Lehrer doch zu helfen wissen.

Lehrer. Welche Zahl ist um 4 größer, als 5? **Schüler.** Die Zahl 9 ist um 4 größer, als 5. L. Wie viel Zahlen wurden in der Frage genannt? Sch. Zwei Zahlen wurden in der Frage genannt. L. Wie heißen diese zwei Zahlen? Sch. Diese zwei Zahlen heißen 4 und 5. L. Was habe ich von dir verlangt? Sch. Ich soll die Zahl suchen, welche um 4 größer ist, als 5. L. Wie findest du die Zahl, welche um 4 größer ist, als 5? Sch. Ich finde die Zahl, wenn ich 4 zu 5 zähle. L. Welche Zahl erhältst du, wenn du 4 zu 5 zählst? Sch. Ich erhalte die Zahl 9. L. Die zwei Zahlen 4 und 5 machen zusammen also so viel aus, als welche Zahl? Sch. 4 und 5 machen zusammen so viel aus, als 9. L. Stelle die 2 Zahlen 5 und 4 mit Strichen dar! — Was hast du nun gethan? Sch. Ich habe 5 Striche und daneben 4 Striche gemacht. L. Wie viele Striche hast du im Ganzen gemacht? Sch. Ich habe in Allem 9 Striche gemacht. L. 9 ist um wie viel größer, als 5? Sch. 9 ist um 4 größer, als 5. L. 5 ist um wie viel kleiner, als 9? Sch. 5 ist um 4 kleiner, als 9. L. Hast du zu 5 eine gleiche, oder eine größere, oder eine kleinere Zahl gezählt, um 9 zu erhalten? Sch. Ich habe zu 5 eine um 1 kleinere Zahl gezählt, um 9 zu erhalten.

Durch solche und ähnliche Fragen gelangen die Schüler zum Bewußtsein ihres Thuns und werden gewöhnt, jede Zahl, welche in einer Aufgabe vorkommt, von den übrigen Zahlen in derselben Aufgabe zu unterscheiden.

Anm. So weit müssen die Kinder im ersten Schuljahre geführt werden. Geübten Lehrern wird es möglich sein, das Zählen von zehn bis zwanzig

oder noch weiter vorzunehmen; aber man eile ja nicht! Man gehe nicht eher weiter, bis Alles klar erkannt und fertig eingeübt ist. Durch das Darstellen und Anschauen jeder Aufgabe mit und an Strichen muß der Schüler sich für die weiteren Uebungen befähigen. Es ist daher ein wesentliches Erforderniß, daß sich der Unterricht überall an die Anschauung anschließe und der Schüler gewöhnt werde, sich jede Aufgabe durch Darstellung der Zahlen mit Strichen anschaulich deutlich zu machen.

§. 2.

Die zweite Zahlenordnung (10—100).

Erzeugung und Erkenntniß der Zahlen von 10 bis 100. Derselbe Gang, der bei Behandlung der Grundzahlen eingehalten wurde, muß auch bei der zweiten Zahlenordnung befolgt werden: man beginne mit der Anschauung und Benennung der Zahlen, damit das Kind zu richtigen Vorstellungen gelange; hierauf folge die Darstellung des Vorgestellten, alsdann die Erkenntniß des in der Seele des Kindes Erzeugten und endlich die Anwendung des Erkannten. Es müssen daher die Reihen von 10 bis 20, von 20 bis 30 u. s. w. vor den Augen des Kindes entstehen. Man stelle zu diesem Zwecke zu 10 Kindern noch 1 Kind, sodann zu 10 Kindern noch 2, 3, 4 u. s. w. Kinder, und lasse an diesen Kindern (dann auch an andern Gegenständen) die Zahlen von 10 bis 20 anschauen und benennen. Hierauf lasse man die angeschauten und benannten Zahlen mit Strichen darstellen, und leite die Kinder zur Erkenntniß dieser Zahlen an. Das Kind kommt zum Bewußtsein einer Zahlvorstellung durch Vergleichung dieser Zahl mit den vorhergehenden Zahlen, und da die Zahl 1 allen andern Zahlen vorhergeht und zu Grunde liegt; so fordert die Erkenntniß einer Zahl, daß man wisse, wie vielmal dieselbe 1 in sich schließt. Bevor man aber zur Erkenntniß der Zahlen der zweiten Ordnung schreiten kann, müssen die Kinder mit dem Ausdruck „Einer" bekannt, und im Zusammenfassen von 10 Einern zu 1 Zehner geübt sein. So wie man z. B. den Werth von 3 Kreuzern sich als Eine Einheit einer höhern Münzsorte, nämlich als 1 Groschen, oder 32 Loth als 1 Pfd. vorstellen kann; so kann man den Werth von irgend einer Anzahl Einheiten zu Einer höhern Einheit, also auch den Werth von 10 Einheiten der ersten Zahlenordnung zu Einer Einheit der zweiten Ordnung, oder 10 Einer zu 1 Zehner zusammenfassen. Hat man 10 Einheiten der ersten Ordnung mit

Strichen dargestellt; so kann die Zusammenfassung dieser 10 Einheiten zu 1 Einheit der zweiten Ordnung durch einen darüber gesetzten Bogen ausgedrückt werden: $\overbrace{//////////}$ — Die Schüler schauen zuerst 1 Dreier (Groschen) als 1 Stück, und 3 Kreuzer als 3 Stücke, 1 Sechser als 1 Stück, und 6 Kzr. als 6 Stücke an, und werden auf die Werthgleichheit dieser Dinge aufmerksam gemacht. Um 3 Kreuzer auf der Tafel anzudeuten, werden 3 Striche auf dieselbe gezeichnet; um einen Dreier anzudeuten, werden 3 Striche gezeichnet und über dieselben ein Bogen gesetzt. Eben so bedeutet ein über 6 Striche gesetzter Bogen 1 Sechser, ein über 10 Striche gesetzter Bogen 1 Zehner. Der Lehrer zeichnet alsdann auf die große Schultafel 10 Striche und rechts davon noch einen, und läßt die Kinder auf ihre Tafeln dasselbe thun. Nun fragt der Lehrer: „Wie viele Einer? Kinder: 11 Einer." Hierauf setzt der Lehrer einen Bogen über die 10 ersten gleichweit von einander stehenden Striche, läßt die Kinder dasselbe thun und fragt: Wie viele Zehner und Einer? Kdr.: 1 Zehner und 1 Einer. Lehrer: 11 Einer sind wie viele Zehner und Einer? Kdr.: 11 Einer sind 1 Z. und 1 E. Eben so wird bei 12 verfahren. Der Lehrer zeichnet 10 Striche und rechts davon 2 auf die große Schultafel und fragt: Wie viele Einer? 12 Einer sind 11 Einer und wie viele Einer? Hierauf setzt er einen Bogen über die 10 ersten Striche und fragt: 12 Einer = wie viele Zehner und Einer? So werde der Schüler angeleitet, jede der angeschauten und benannten Zahlen auf doppelte Weise, und zwar a. in Zehner und Einer, und b. in die vorhergehende Zahl und 1 zu zerlegen. Die Frage: Wie kann man sagen, statt 15? — könnte ein Schüler also folgender Maßen beantworten: 15 = 10 + 5 = 10 × 1 + 5 × 1 = 1zig + 5 = 1 Zehner + 5 Einer = 14 + 1.

Ein weiteres Zerlegen z. B. in 13 + 2, 12 + 3 darf nicht zurückgewiesen werden, wenn es von dem Schüler ausgeht, kann aber nicht gefordert werden, und ist auch zur Vermittlung der spätern Uebungen nicht nothwendig.

Sind die Zahlen von 10 bis 20 klar erkannt; so verfahre man eben so bei den Zahlen von 20 bis 30 u. s. w. bis 100, gehe aber ja nie in einen andern Zehner über, ehe die Schüler die Zahlen der vorhergehenden Reihe mit Sicherheit in Zehner und Einer auflösen können, und wenn Zehner und Einer gegeben wurden, schnell die Zahl wissen,

welche der Summe dieser Zehner und Einer entspricht. Z. B. 4 Zehner und 5 Einer sind 43ig und 5 oder 45.

Anm. I. Haben die Kinder die Zahlen in Strichen angeschaut und dargestellt, und man fühlt das Bedürfniß einer kürzern Bezeichnungsweise; so kann man einen längern Strich oder die römische X als Zahlzeichen für zehn Einer gebrauchen.

Anm. II. Manche Lehrer sind der Ansicht, daß vor jedem Uebergang in einen andern Zehner alle Uebungen des Zuzählens, Abzählens, Vervielfachens und Entvielfachens in der bereits erkannten Zahlenreihe vorkommen müßten. Wer bisher dieser Ansicht gehuldigt, der sehe zu, ob nach dem hier vorgezeichneten Gange die Kinder nicht viel leichter, schneller und sicherer zum Ziele gelangen. Nur das ist der rechte Weg, auf dem die Kinder mit klarem Bewußtsein, frei von methodischem Zwange und mit Freudigkeit vorwärts eilen. Das Unterbrechen einer Zahlenordnung und die stückweise Behandlung derselben bringen immer Nachtheile.

§. 3.

Bezeichnung der Zahlen von eins bis zehn, und von zehn bis hundert mit Ziffern.

Wenn die Schüler die Zahlen von 1 bis 100 verstehen, sich also bei jeder Zahl die Menge der Einheiten vorstellen, die sie enthält, und jede Zahl mit Strichen darstellen können; wenn sie ferner im Zusammenfassen von je 10 Einern zu 1 Zehner hinlänglich geübt und daher im Stande sind, die Zahlen mit Sicherheit in Zehnern und Einern anzugeben: so mache man sie mit den Ziffern bekannt. Die natürlichste Art, die Zahlen durch Zeichen auszudrücken, ist zwar, daß man so viel Striche oder Tupfen neben einander stellt, als Einheiten zu denken sind. Weil sich dies aber sehr bald nicht mehr hinlänglich übersehen ließe; so hat man 1) einfachere Zeichen für die bestimmten Mengen gewählt, und 2) um nicht für jede neue Menge ein neues Zeichen zu erhalten, mit dieser Bezeichnungsweise bei einer bestimmten, an sich willkührlichen Menge abgebrochen und die größern Mengen durch dieselben Zeichen ausgedrückt, indem man diesen durch ihre veränderte Stellung eine veränderte Bedeutung gab. In dieser Beziehung nennt man die immer wiederkehrenden Zeichen Ziffern. Unser Zahlensystem, dessen Grundzahl zehn ist, erfordert zehn Zahlzeichen oder eigentlich neun Zahlzeichen und die Null, welche anzeigt, daß keine Einheiten einer Ordnung vorhanden sind. Dieses Zahlensystem heißt das zehntheilige oder dekadische, weil man immer

zehn Einheiten einer Ordnung zu einer nächsthöhern Einheit verband. Man hätte die ganze Masse der Zahlen auch dergestalt in Klassen eintheilen können, daß immer sechs oder eine beliebige andere Menge Einheiten einer Ordnung die nächst höhere Einheit bilden.

Bei jeder Ziffer ist auf zweierlei zu achten: auf die Figur, und auf die Stelle, welche sie einnimmt. Wie viel Einheiten es sind, wird aus der Form (Figur), was für Einheiten es sind, aus der Stelle der Ziffer erkannt. Der Werth, den eine Ziffer durch ihre Figur hat, kann nicht verändert werden, der Stellenwerth ändert sich; so oft eine Ziffer um eine Stelle nach der linken Hand hin fortschreitet, nimmt der Werth der Ziffer um das Zehnfache zu. Die Ziffer 6 bedeutet allein stehend 6 Einer; in der zweiten Stelle (60) bedeutet sie 6 Zehner oder 6 Zig. Soll die Zahl sechzig mit Ziffern geschrieben werden, so muß man diese Zahl als 6 Zehner auffassen; denn 60 Einheiten der ersten Ordnung können nicht mit Ziffern geschrieben werden, weil wir nur neun Zahlzeichen haben. Die Einheiten der ersten Ordnung, die Einer, werden in die erste Stelle zur Rechten geschrieben, die Einheiten der zweiten Ordnung, die Zehner, in die zweite Stelle zur Linken; da nun bei der Zahl sechzig keine Einer angegeben sind, so wird die Stelle der Einer mit einer 0 ausgefüllt. Die Null hat also an sich keinen Werth, sondern wird nur geschrieben, damit man eine Ziffer, welche eine Zahl der zweiten Ordnung bezeichnet, in die zweite Stelle setzen kann; sie dient also nur dazu, den Stellenwerth der linker Hand stehenden Ziffer richtig anzugeben. Die Zahlen von 1 bis zur Zahl 10 werden mit 1 Ziffer geschrieben; die Zahlen zehn, zwanzig, dreißig, vierzig, fünfzig, sechzig, siebenzig, achtzig, neunzig werden mit 1 Ziffer und 1 Null geschrieben. Alle übrigen Zahlen von zehn bis hundert werden mit 2 Ziffern geschrieben, die Zahl hundert wird mit 1 Ziffer und 2 Nullen bezeichnet.

Diese Bemerkungen und die Fragen im „Rechenunterrichte" werden jeden Lehrer in den Stand setzen, das Kennen und Schreiben der Ziffern zu lehren. Auch hier eile man nicht, und dulde keine schlecht geschriebene Ziffern. Das Schreiben derselben kann man nach folgender Ordnung üben:

1, 4, 7, — 6, 0, 9, — 2, 3, 5, — 8.

Anm. Man unterscheide Einer von Einser; letzterer bedeutet die Ziffer für 1.

§. 4.

Das Zuzählen der Grundzahlen.

Der Gang, der bei Behandlung der Grundzahlen eingehalten wurde, muß auch bei allen vier Rechnungsarten innerhalb der zweiten Zahlenordnung befolgt werden. Wenn der Schüler eine klare Anschauung der Zahlen von 1 bis 100 hat, im Zusammenfassen zu Zehnern und im Auflösen der Zehner (§. 2) hinlänglich geübt ist, und die bei den einzelnen Rechnungsarten vorkommenden Benennungen versteht; so gebe der Lehrer die Aufgaben ohne alle Bemerkungen über ihre Lösung. Es wird dies hinreichend sein, wenn dabei die rechte Stufenfolge beobachtet wird. Der Schüler muß aber im Stande sein, jede Aufgabe innerhalb dieses Zahlenkreises durch Striche zu veranschaulichen, und daher gewöhnt werden, jede Aufgabe, welche er nicht ohne sinnliche Anschauung mit Sicherheit beantworten kann, sich vorher durch Striche deutlich zu machen.

Die erste Uebung besteht im Zuzählen der Grundzahlen. Es werden nämlich die Zahlen der ersten Ordnung (die Grundzahlen) zu den bereits erkannten Zahlen gezählt. Das Zeichen des Zuzählens ist + (plus, und). 6 + 2 = 8 wird gelesen: 6 und 2 sind 8.

a. Das Zuzählen der Zahl 1.

Das Zählen der Zahl 1 zu jeder Zahl von 1 bis 100 wird leicht von statten gehen, wenn die Kinder eine klare Vorstellung von diesen Zahlen haben. Dennoch übergehe man diese Uebung nicht; denn eine große Fertigkeit ist hier schlechterdings nothwendig, und zudem muß das Neue und Unbekannte stets an das Bekannte geknüpft werden, da ein Verstehen nur dann möglich ist, wenn der Zusammenhang des zu Erlernenden mit dem bereits schon Erlernten und Erkannten eingesehen wird.

Ist das Zählen der Zahl 1 zu jeder Zahl von eins bis hundert mündlich tüchtig geübt; so wird die dadurch gebildete Reihenfolge auch mit Ziffern geschrieben, wie dies im „Rechenunterrichte" angedeutet ist. Es bleibt dem Lehrer überlassen, zu bestimmen, ob jedes Mal von vorn angefangen werden, oder in der Linie fortgefahren und es nur durch einen Strichpunkt bemerkt werden soll, daß 1 zugezählt worden ist. Man kann also schreiben:

1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 1 = 4 u. s. w.

oder:

$1 + 1 = 2$
$2 + 1 = 3$
$3 + 1 = 4$
u. s. w.

Letztere Art zu schreiben verdient den Vorzug, da sie für Kinder die leichtere ist.

Anm. Dieses Schreibenlassen der Reihenfolgen ist von großem Vortheile; der Schüler übt für sich die Sache, und der Lehrer kann sich unterdessen mit einer andern Abtheilung beschäftigen.

Ist der Schüler bisher richtig geführt worden; so wird das Kind alles Uebrige in dieser Zahlenreihe gleichsam von selbst lernen. Findet ein Lehrer bei dem Zuzählen der übrigen Grundzahlen sich genöthigt, vorzusprechen und mühsam die Sache zu erklären, und reichen dazu Fragen nicht hin; so war sein Unterricht nicht gründlich, und er hat sich sicher Uebereilungen zu Schulden kommen lassen.

b. Das Zuzählen der Zahl 2.

Der Schüler weiß, daß man statt 2, 1 und 1 sagen kann und wird also auch leicht einsehen, daß man statt 2 zuzuzählen, 1 und 1 zuzählen kann. Ist daher die Frage gegeben: wie viel sind 15 + 2? so wird er denken und sprechen: 15 + 1 sind 16, 16 + 1 sind 17; also sind 15 + 2 = 17.

Anm. Manche Lehrer lassen ihre Schüler so sprechen: 15 + 2 heißt so viel, als 15 und 1 und 1; 15 und 1 sind 16 und 1 sind 17; also sind 15 und 2 = 17. Kommt ein Kind selbst darauf, die Sache so auszusprechen, so ist es recht; allein man hüte sich doch ja, den Kindern einen solchen Wortschwall einzulernen! Nur dafür werde gesorgt, daß das Kind nichts Unrichtiges ausspreche; sobald man ihm die Worte, welche es gebrauchen soll, vorschreibt, so schlägt man seinen Geist in Fesseln. Wenn die Kinder die Worte des Lehrers auch noch so getreu, ja in demselben Tone nachsprechen, so ist dies durchaus noch kein Beweis, daß sie die besprochene Sache verstehen; ja, oft macht gerade die Gleichförmigkeit der Worte und des Tones bei allen Kindern die Methode des Lehrers verdächtig. Man beherzige ein für allemal: Der Lehrer kann nicht für die Kinder denken, er soll sie nur anleiten, daß sie selbst denken! Ueberhaupt soll die Auflösung einer Aufgabe stets so kurz, als möglich sein; erst nachher soll der Schüler Rechenschaft über die Art seiner Auflösung geben. Daß man früher Sprechformeln, wie die oben angeführte, einzuüben suchte, beruhte auf dem doppelten Irrthume, daß man mit diesen Sprechformeln zugleich die Einsicht in die Sache verschafft zu haben glaubte, und daß man von der Ansicht ausging, Urtheilen und Schließen seien Operationen, welche nur auf der Stufe des begrifflichen Denkens möglich seien. Im Gegentheile

sollen sich in der Elementarschule die Urtheile und Schlüsse des Schülers stets auf die vorausgegangene Anschauung gründen.

Das Zuzählen der Zahl 2, so wie das Zuzählen aller übrigen Grundzahlen, wird in Reihenfolgen geübt, wobei sich jedesmal so viele Uebungen ergeben, als die Grundzahl Einheiten enthält. Die Reihenfolgen, welche alle im „Rechenunterrichte" angedeutet sind, werden mündlich und schriftlich fortgesetzt bis hundert, und von den Kindern so lange geschrieben, bis die höchste Fertigkeit erreicht ist. So oft eine Grundzahl zugezählt ist, folgt ein Strichpunkt, oder es wird vorn angefangen. Bei den Uebergängen von einer Zehnerreihe in die folgende ist es anfangs schlechterdings nothwendig, die Grundzahl so zu zerlegen, daß die Zehnerzahl voll gemacht wird. Hat man z. B. 4 zu 19 zu zählen, so spreche man: $19 + 1 = 20, + 3 = 23$. Das Ueberspringen der Zehner sollte vor dem vierten Schuljahre nicht gestattet werden..

Ist das Zuzählen in unbenannten Zahlen hinlänglich geübt, so folgen sogenannte angewandte Aufgaben. Die Bemerkung §. 1. 5, gilt auch hier, so wie bei allen folgenden Uebungen. Angenommen, es sei dem Schüler aufgegeben, 7 zu 36 zu zählen, und er habe diese Aufgabe folgender Maßen gelöst: $7 = 4 + 3$; $36 + 4 = 40$, $40 + 3 = 43$; — so hat derselbe nun in Worten auszusprechen, was für eine Aufgabe ihm gegeben worden, und wie er bei Auflösung derselben verfahren ist. Er könnte dies etwa in folgender Weise thun: Es soll die Zahl gesucht werden, welche so viele Einheiten enthält, als die Zahlen 7 und 36 zusammengenommen. Ich habe zuerst 7 in 4 und 3 zerlegt, alsdann zu 36, 4 und zu der dadurch erhaltenen Summe noch 3 gezählt.

§. 5.

Das Abziehen der Grundzahlen.

Der Schüler hat das Abziehen innerhalb der Zahlenreihe von 1 bis 10 schon geübt; dies werde hier wiederholt, und daran das Abziehen der Grundzahlen von den Zahlen der zweiten Ordnung geknüpft. Das Zeichen des Abziehens ist — (minus, weniger). $6 - 2 = 4$ wird gelesen: 6 weniger 2 sind 4.

Das Abziehen der Zahl 1 kann keine Schwierigkeit machen; das Abziehen der Zahl 2 auch nicht, denn das Kind weiß, daß $2 = 1 + 1$, daß es also statt 2 auch $1 + 1$ abziehen kann. Gibt man ihm nun

die Aufgabe, 2 von 17 abzuziehen, so wird es sprechen: 17 — 1 = 16, — 1 sind 15; also sind 17 — 2 = 15. Oder: 17 — 1 = 16, 16 — 1 = 15. Oder: wenn ich 2 von 17 abziehen soll, so erhalte ich eben so viel, als wenn ich 1 + 1 von 17 abziehe; wenn ich 1 + 1 von 17 abziehe, so erhalte ich 15, also bleiben auch 15, wenn 2 von 17 abgezogen werden. Auch das Abziehen der übrigen Grundzahlen wird leicht von statten gehen; das Kind wird jede Zahl in solche Zahlen zerlegen, die es schon abziehen kann. — Ist die Fertigkeit des Schülers durch Fragen außer der Reihe erprobt, so kann man das Zuzählen mit dem Abziehen verbinden; z. B. 26 + 7 — 9 = ?

Mit den Benennungen: Vollzahl, Abzugszahl, Rest, mache man die Schüler nur allmählig bekannt, und gebe im Allgemeinen Kindern auf dieser Stufe innerhalb 8 — 14 Tage nur eine neue Benennung. Die angewandten Aufgaben §. 5. b. nehme man das erste Mal nur bis zur 16ten, und die übrigen erst bei der Wiederholung durch. Die Aufgaben von Nr. 17 an eignen sich nur für die befähigteren Schüler.

Anm. Es wurden hier und in den folgenden Paragraphen Aufgaben aufgenommen, deren Lösung den minderbefähigten Schülern geradezu erlassen werden kann. Sie sollen nur den Stoff zur Beschäftigung der fähigeren Schüler geben, weil durch den Unterricht stets die ganze Kraft aller Schüler in Anspruch genommen werden soll.

Das Verfahren des Lehrers bei den angewandten Aufgaben mag folgendes Beispiel erläutern: 73 besteht aus zwei Zahlen, von denen die eine 9 ist; wie heißt die andere? Der Lehrer lasse den Schüler die Aufgabe wiederholen, und frage dann: Aus wie viel Zahlen besteht 73? Kennst du diese beiden Zahlen? Welche dieser beiden Zahlen ist dir bekannt? Wie findet man die zweite Zahl? Auf die letzte Frage dürfte die Antwort ausbleiben; in dem Falle frage der Lehrer: 5 besteht aus zwei Zahlen, von denen die eine 3 ist; wie heißt die andere? der Schüler wird sagen: 2. L. Aus wie viel Zahlen besteht 5? Wurden diese beiden Zahlen in der Aufgabe genannt? Welche wurde genannt? Wie hast du die andere Zahl gefunden? Hast du die unbekannte (nicht durch die Aufgabe bekannte) Zahl gefunden, indem du 3 von 5 abgezogen hast? Hast du die unbekannte Zahl gefunden, indem du die bekannte Zahl von 5 abgezogen hast?

Nun gebe man noch viele solche Beispiele in kleinen Zahlen, frage den Schüler jedes Mal, wie er die unbekannte Zahl gefunden hat,

und er wird einsehen, daß er auch in obiger Aufgabe 9 von 73 abziehen muß, um die unbekannte zweite Zahl zu erhalten. Man füge alsdann noch folgende Fragen bei: Wenn du 9 von 73 abziehest; welches ist dann die Vollzahl, welches die Abzugszahl? Wie findet man den Rest, wenn die Vollzahl und die Abzugszahl gegeben sind? (Folgt keine Antwort, so gebe man ohne weitere Erklärung gleich wieder so lange Aufgaben in kleineren Zahlen, bis das Kind die Sache einsieht. Z. B. die Vollzahl ist 7, die Abzugszahl 3; welches ist der Rest? Wie hast du den Rest gefunden?) Wenn eine Zahl aus 2 Theilen besteht, und der eine Theil ist bekannt, wie findet man den andern Theil?

Von jeder Aufgabe werden so lange ähnliche Aufgaben gegeben, bis die volle Einsicht bei allen Schülern erzielt ist.

Soll der Rechenunterricht das Denken fördern, so ist auf jeder Stufe volle Einsicht nothwendig; es ist daher nicht genug, daß der Schüler das Resultat findet, er muß auch jedesmal angeben, wie er es gefunden hat. Häufig findet der Schüler ein Facit, ohne sich gerade bewußt zu sein, auf welchem Wege er es gefunden; der Lehrer muß in solchem Falle dafür sorgen, daß das Verfahren nachträglich zum Bewußtsein erhoben werde.

Die Resultate der angewandten Aufgaben sind folgende: 1) 6. 2) 4 Gr. 3) 4. 4) 1 und 8, 2 und 9, 13 und 20 u. s. w. 5) 38. 6) 85. 7) 58. 8) 79. 9) 8. 10) 45 fl. 11) 33. 12) 27. 13) 7. 14) 11. 15) 86. 16) 17. 17) 8. 18) 9. 19) 64. 20) 15. 21) 57. 22) 73. 23) 21. 24) 83. 25) 66. 26) 32. 27) 9. 28) 63. 29) 76. 30) 91. 31) 16. 32) 85 ist um 8 größer als 77, und um 7 kleiner als 92. 33) 61. 34) 33. 35) 45. 36) 8. 37) 82. 38) 48.

§. 6.

Das Vervielfachen der Grundzahlen.

Das Vervielfachen gründet sich auf das Zusammenzählen gleicher Zahlen und wird keine Schwierigkeiten machen, sobald der Schüler nur weiß, was er hier aufsuchen soll, wozu die im „Rechenunterrichte" enthaltenen Fragen hinreichen werden. Man vergleiche, was im §. 1 über das Vervielfachen bemerkt wurde. Die Uebungen werden so lange mündlich und schriftlich vorgenommen, bis Fertigkeit erzielt ist, sodann wird das Vervielfachen mit dem Zu-

zählen und Abziehen verbunden und auch in angewandten Aufgaben vorgenommen. Beim Schreiben machen die Kinder an den obern Rand ihrer Tafel die nöthigen Striche. — Auch beim Vervielfachen kann das Darstellen mit Strichen nicht genug empfohlen werden; denn wenn der Schüler z. B. den Unterschied zwischen zweimal 3 ///,/// und dreimal 2 //,//,// nicht genau kennt, so wird er auch alle späteren Uebungen nur mechanisch aufzufassen im Stande sein. Das Zeichen des Vervielfachens ist: $\times$ oder .; 6 $\times$ oder 6 . 2 = 12 wird gelesen: 6 mal 2 sind 12.

Anm. Neben den Uebungen des Vervielfachens wiederhole man in jeder Rechenstunde einzelne Uebungen des Zu- und Abzählens; denn nur bei fleißiger Wiederholung ist es dem Schüler möglich, die gehabten Anschauungen und Vorstellungen zu bewahren.

§. 7.

Das Entvielfachen mit den Grundzahlen.

Nimmt man die Zahl 3 zweimal ///,///, so erhält man 6. Hier sind die Zahlen 3 und 2 die beiden Vielfacher (Faktoren) und man hat durch das Vervielfachen das Vielfache (Produkt) 6 erhalten. 3 ist die Vervielfachungszahl, denn man hat 3 mehrere Male genommen; und 2 ist der Vervielfacher, denn 2 zeigt an, wie vielmal man die Vervielfachungszahl genommen. Beim Darstellen wird nur die Vervielfachungszahl so vielmal dargestellt, als der Vervielfacher anzeigt; der Vervielfacher selbst wird nicht dargestellt.

Sind nun das Vielfache 6 und die Vervielfachungszahl 3 gegeben, und es wird der Vervielfacher gesucht; so findet man diesen, indem man untersucht, wie oft man da 3 hinwegnehmen kann, wo 6 sind, oder mit andern Worten, indem man untersucht, wie oft 3 in 6 enthalten ist. ///,///. Man heißt das Verfahren, durch welches man findet, wie oft eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist, das Messen. Die Zahl, welche durch das Messen gefunden wird, zeigt an, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist, und heißt daher der Anzeiger (Quotient).

Ist das Vielfache 6 und der Vervielfacher 2 gegeben; so findet man die Vervielfachungszahl, indem man 6 in 2 gleiche Theile theilt, also durch ein Verfahren, welches das Theilen heißt. ///,///. Die Zahl, welche durch das Theilen gefunden wird, heißt der Theil (Quotient).

Das Messen und das Theilen ist dem Vervielfachen entgegengesetzt, wie das Abzählen dem Zuzählen*); denn beim Vervielfachen sind 2 Vielfacher (Faktoren) gegeben, und man sucht das Vielfache (Produkt); beim Messen und Theilen sind ein Vielfacher und das Vielfache gegeben, und man sucht den andern Vielfacher. Man heißt daher das Messen und das Theilen das Entvielfachen (die Division); der gegebene Vielfacher heißt der Entvielfacher (Divisor), das gegebene Vielfache heißt die Entvielfachungszahl (der Dividendus). — Das Entvielfachen zeigt sich mithin in der Anwendung entweder als ein Messen, oder als ein Theilen. Messen heißt untersuchen, wie vielmal eine Zahl oder Größe**) eine andere Zahl oder Größe in sich faßt; oder untersuchen, wie vielmal man eine Zahl oder Größe von einer andern Zahl oder Größe hinwegnehmen kann; oder untersuchen, wie oft eine Zahl oder Größe in einer andern Zahl oder Größe enthalten ist. Theilen heißt, eine Zahl oder Größe in so viel gleiche Theile zerlegen, als eine andere Zahl anzeigt.

Wenn man 6 durch 2 mißt, so findet man, daß 2 in 6 dreimal enthalten ist. //, //, //. Wenn man 6 durch 2 theilt, so findet man, daß einer der 2 gleichen Theile 3 ist. ///, ///.

---

*) Beim Zusammenzählen sind 2 Posten gegeben, deren Summe gesucht werden soll. Sind die Summe und ein Posten gegeben, so findet man den andern Posten durch das Abziehen. Die beiden Posten sind möglicher Weise nur in der Anzahl der Einheiten unterschieden; daher haben wir auch nur eine Form für das Abziehen. Beim Vervielfachen sind aber Vervielfachungszahl und Vervielfacher ihrem Wesen nach unterschieden, indem die Vervielfachungszahl irgend eine Anzahl Einheiten, der Vervielfacher aber nur anzeigt, wie vielmal diese Einheiten genommen werden sollen.

Sind die Vervielfachungszahl und das Vielfache gegeben, so muß das Messen angewendet werden. Denn man will die Zahl finden, welche anzeigt, wie oft die Vervielfachungszahl genommen worden ist; man muß also sehen, wie oft man die Vervielfachungszahl vom Vielfachen hinwegnehmen kann, d. h. man muß messen.

Wenn der Vielfacher und das Vielfache gegeben sind, so findet man die Vervielfachungszahl durch das Theilen. Denn das Vielfache faßt die Vervielfachungszahl so vielmal in sich, als der Vervielfacher anzeigt; es muß daher, um die Vervielfachungszahl zu erhalten, das Vielfache in so viele gleiche Theile zerlegt werden, als der Vervielfacher anzeigt.

**) Ueber den Unterschied zwischen Zahl und Größe siehe §. 14.

Es ist nun die Frage zu beantworten, wie der Schüler zur Auffassung dieser 2 Formen des Entvielfachens zu führen sei? In keinem Falle durch Erklärung der Begriffe „Messen" und „Theilen"; denn die schönsten Definitionen, insofern sie nicht vom Schüler selbst gebildet werden können, helfen demselben Nichts, sondern schaden ihm. Vom Lehrer gegebene Definitionen sind in vielen Fällen ein der klaren Erkenntniß der Sache vorgeschobener Riegel. Man gebe dem Schüler die Aufgaben, wie sie im „Rechenunterrichte" vorkommen, und lasse denselben jedes Mal in Worten aussprechen, was er gethan hat, und recht viele Aufgaben mit Strichen darstellen. Bei größeren Aufgaben haben die Schüler ähnliche Aufgaben in kleinen ganzen Zahlen zu bilden, und diese mit Strichen darzustellen. Die Aufgaben unter B. c. werden erst bei der Wiederholung vorgenommen, und von Nr. 92 an den schwächern Schülern erlassen.

Der Schüler würde also, nachdem er z. B. die Aufgabe: „Wie oft ist 2 in 8 enthalten?" gelöst hätte, ungefähr folgender Maßen sprechen: Ich habe 8 Striche gezeichnet und untersucht, wie oft ich da 2 Striche hinwegnehmen kann, wo 8 Striche sind. Ich habe gefunden, daß man 2 Striche von 8 Strichen viermal hinwegnehmen kann. Bei der Aufgabe: „Wie groß ist einer der 2 gleichen Theile von 8?" würde der Schüler ungefähr sprechen: Ich habe 8 in 2 gleiche Theile zerlegt, und auf diese Weise gefunden, daß einer der 2 gleichen Theile von 8 vier ist. — Ist dies bei vielen Aufgaben ausgesprochen worden, so bemerke der Lehrer gelegenheitlich, daß man das Untersuchen, wie oft man eine Zahl da hinwegnehmen könne, wo eine andere ist, das Messen, und das Zerlegen in gleiche Theile das Theilen heiße. Man dringe übrigens nicht darauf, daß die Kinder Begriffsbestimmungen von Messen und Theilen geben; es genügt auf dieser Stufe, wenn sie in jedem einzelnen Falle angeben, wie sie bei Auflösung der Aufgabe verfahren sind.

Das Zeichen der Division ist :, oder auch ein wagerechter Strich, über den die Theilungszahl und unter welchen der Theiler gesetzt wird. 6 : 2 oder $\frac{6}{2}$ wird gelesen: 6 getheilt (gemessen) durch 2.

Anm. In den meisten Volksschulen Deutschlands setzt man den Theiler vor, in den höhern Schulen hinter das Divisionszeichen. Um auch hierin zur Einigung zu kommen, ist es wünschenswerth, durchgängig die letztere Schreibart zu wählen, was auch in diesem Buche geschehen ist. Von

Einigen wird der Divisor vor das Zeichen gesetzt, wenn gemessen, und hinter das Zeichen, wenn getheilt werden soll.

§. 8.

Vermischte Aufgaben.

Es kann nun jede der 4 Rechnungsarten mit jeder andern verbunden werden, z. B. das Entvielfachen a. mit dem Zuzählen, b. mit dem Abziehen, c. mit dem Zuzählen und Abziehen, d. mit dem Vervielfachen, e. mit dem Vervielfachen und Zuzählen, f. mit dem Vervielfachen und Abziehen, g. mit dem Vervielfachen, Zuzählen und Abziehen. Bei jeder Auflösung hat der Schüler anzugeben, welcher Rechnungsart oder welcher Rechnungsarten er sich dabei bedient hat. Kann er eine Aufgabe nicht auflösen*), so soll er sich eine ähnliche in kleinen, leicht zu übersehenden Zahlen bilden, diese auflösen und aus dem dabei beobachteten Verfahren die Auflösung der zuerst gegebenen Aufgabe ableiten. Das ist eine Hauptsache, daß der Schüler überall angeleitet werde, sich selbst zu helfen; es ist dies der einzige Weg, ihn selbstthätig und dereinst selbstständig zu machen!

Die schwierigeren Aufgaben werden nur den befähigteren Schülern zur Auflösung gegeben.

II. Stufe.

§. 9.

Das Erbauen der dritten und folgenden Zahlenordnungen.

A. Von Hundert bis Tausend.

I. Mündlich.

Es müssen hier folgende Uebungen vorkommen:

1) das Zählen von 100 bis 1000;

---

*) Diese Bemerkung gilt auch für die später folgenden Aufgaben.

2) das Zusammenfassen von 10 Einheiten einer Ordnung zu einer Einheit der nächst höhern Ordnung;
3) das Auflösen von Einheiten höherer Ordnungen in Einheiten niederer Ordnungen.

Das Zählen von hundert bis tausend geht leicht von statten; schwieriger ist es, den Schülern so viele gleichartige und gleichnamige Gegenstände vorzuführen, daß sie die Zahlen von 100 bis 1000 daran schauen können. Der Lehrer zeichne auf einen großen Bogen Papier, der auf einem Pappendeckel aufgezogen ist, 1000 Striche, je 100 in 1 Reihe und so, daß nach je 10 Strichen ein kleiner Raum gelassen ist. Dasselbe lasse man auch die Schüler etwa auf 1/4 Bogen Papier thun, wobei man jedoch verlange, daß alle Schüler hiezu ein gleich großes Blatt Papier benützen und die Striche gleich lang und in gleicher Entfernung zeichnen, damit diese Darstellungen, in Eine Reihe gestellt, später zur Vermittlung von Anschauungen höherer Zahlen dienen können.

Haben die Schüler die Zahlen von 100 bis 1000 angeschaut, benannt und dargestellt; so leite man sie an, je 10 Einheiten der zweiten Ordnung zu 1 Einheit der dritten Ordnung zusammenzufassen (10 Zehner sind 1 Hunderter, 20 Zehner = 2 Hunderter u. s. w.), und die Zahlen in Zehnern und Einern und in Hundertern, Zehnern und Einern anzugeben (594 = 500 + 90 + 4 = 5 Hunderter + 9 Zehner + 4 Einer = 59 Zehner + 4 Einer). Die Einheiten der höhern Ordnungen werden alsdann auch wieder in Einheiten der niederern Ordnungen aufgelöst. Auf diese Weise lernt der Schüler das Grundgesetz unseres Zahlensystems, das Zehnergesetz, praktisch kennen und anwenden.

Anm. Man beachte den Unterschied zwischen zehn und 1 Zehner, hundert und 1 Hunderter, tausend und 1 Tausender. So wie 32 Loth dem Werthe nach = 1 Pfd., und 60 Kzr. dem Werthe nach = 1 fl. sind, man sich aber das eine Mal 32, bezüglich 60 Einheiten, das andere Mal nur 1 Einheit (1 Pfd., 1 fl.) denkt: so ist 10 dem Werthe nach = 1 Zehner, 100 dem Werthe nach = 1 Hunderter, und 1000 dem Werthe nach = 1 Tausender; aber man denkt sich das eine Mal 10, bezüglich 100 und 1000 Einheiten, während man sich das andere Mal diese 10, (100, 1000) Einheiten zu 1 Einheit einer höhern Ordnung zusammengefaßt denkt. Es ist also ein Unterschied zwischen dreihundert und 3 Hundertern. Bei 300 = 300 × 1 denke ich mir 300 Einheiten; bei dem Ausdrucke 3 Hunderter denke ich mir 3 Einheiten der dritten Zahlenordnung.

Man verwechsle auch nicht Einer und Einheit. Jeder Einer ist eine Einheit; aber nicht jede Einheit ist ein Einer. Jedes Ding für sich betrachtet ist eine Einheit, z. B. der Finger, die Hand, der Arm, ein Mensch, ein Dorf, eine Provinz, ein Land, die Erde u. s. w.; unter Einer versteht man die Zahlen der ersten Ordnung.

Der Unterschied zwischen den Ausdrücken 300 und 300 Einer besteht darin, daß ich im letzten Falle diese 300 Einheiten noch besonders als Einheiten der ersten Ordnung erklärt und benannt habe (im Gegensatze zu 300 Zehnern, 300 Hundertern u. s. w.).

II. Schriftlich.

Soll die Zahl 475 mit Ziffern geschrieben werden; so müssen die 400 Einheiten als 4 Hunderter, die 70 Einheiten als 7 Zehner und die 5 Einheiten als 5 Einer aufgefaßt werden. Ist nun das Kind hierin bis zur Fertigkeit geübt; so wird es auch die Zahlen von 100—1000 mit Ziffern schreiben können, sobald es weiß, daß die Einer, als Einheiten der ersten Ordnung in die erste Stelle, die Zehner, als Einheiten der zweiten Ordnung in die zweite Stelle zur Linken, die Hunderter als Einheiten der dritten Ordnung in die dritte Stelle zu stehen kommen.

Anm. I. Man kann dreihundert als 300 Einheiten anschauen. Soll aber dreihundert mit Ziffern geschrieben werden, so müssen diese dreihundert Einheiten zu 3 Einheiten der dritten Ordnung, d. i. zu 3 Hundertern zusammengefaßt werden. Da die Einheiten der dritten Ordnung in die dritte Stelle geschrieben werden müssen; so muß eine erste und zweite Stelle bezeichnet sein, und zu gleicher Zeit müssen die Zeichen für die erste und zweite Stelle angeben, daß keine Einheiten der ersten und zweiten Ordnung genannt sind, welches durch 2 Nullen geschieht.

Anm. II. Ehe man über Tausend hinausgeht, übe man das Zusammenzählen, Abziehen, Vervielfachen und Entvielfachen innerhalb dieser Zahlenreihe, und nehme daher aus den §§. 10 - 14 die Aufgaben (in unbenannten Zahlen) vor, in denen keine Zahlen vorkommen, welche diese Zahlenreihe übersteigen.

B. Das Zählen über Tausend.

Sind die 4 Rechnungsarten in reinen Zahlen innerhalb der Zahlenreihe von 1 bis 1000 hinlänglich geübt; so gehe man zuerst bis Zehntausend, dann bis Hunderttausend und endlich bis Million, und übe jedes Mal innerhalb der erkannten Zahlenreihe die 4 Rechnungsarten tüchtig ein. Erst im sechsten oder siebenten Schuljahre spreche man

von den Zahlenordnungen von Million aufwärts, und hole dann alle Aufgaben nach, in denen solche größere Zahlen vorkommen. Denn wenn auch das Erbauen der höhern Zahlenordnungen keine große Schwierigkeiten hat, sobald einmal das Gesetz unseres Zahlensystems erkannt ist; so weiß doch Jeder, der schon darüber gedacht hat, wie schwer es ist, von einer Zahl der höhern Ordnungen sich eine Vorstellung zu machen, und zudem ist das Rechnen mit solchen großen Zahlen ohne Werth für das praktische Leben und selbst weniger geistbildend, als das Rechnen mit kleineren Zahlen.

Anm. Wenn aus einem Anschauungskreise eine gewisse Anzahl Vorstellungen erzeugt sind; so können aus diesen Vorstellungen neue desselben Kreises gebildet werden, ohne daß es nöthig ist, von der sinnlichen Anschauung auszugehen.

Von der vierten Zahlenordnung an erwachsen die Zahlen-Vorstellungen zu Zahlen-Begriffen. Begriffe haben nur dann Werth, wenn sie aus Anschauungen und Vorstellungen hervorgegangen sind, und wenn der Schüler sie wieder auf deutliche Vorstellungen und Anschauungen zurückführen kann; außerdem sind es hohle Begriffe.

§. 10.

Das Zusammenzählen (Addition) größerer Zahlen.

I. Mündlich.

a.

1) Es kommen beim Zusammenzählen ohne Ziffern folgende Uebungen vor:

1) Zehner zu Zehnern;
2) Zehner zu Hundertern, und Hunderter zu Hundertern;
3) Hunderter zu Tausendern;
4) Zehner und Einer zu Zehnern, und umgekehrt;
5) Zehner und Einer zu Zehnern und Einern;
6) Zehner und Einer zu Hundertern, Zehnern und Einern.

Den befähigteren Schülern können auch Aufgaben gegeben werden, in denen Hunderter, Zehner und Einer zu Hundertern, Zehnern und Einern gezählt werden.

2) Zwei Zahlen werden zusammengezählt, wenn man eine Zahl sucht, welche so viele Einheiten enthält, als diese beiden zusammengenommen (s. „Rechenunterricht" §. 4, Anmerkung).

Wer die Zahlen, welche zusammengezählt werden sollen, versteht, dem wird das Zusammenzählen keine Schwierigkeiten machen; es versteht aber nur Derjenige eine Zahl, der das Gesetz kennt, nach dem sie gebildet worden ist und sie schnell in Zehner und Einer, oder wenn es eine Zahl einer höhern Ordnung ist, in Hunderter, Zehner und Einer u. s. w. zerlegen kann.

Es sind hier keine neue Vorstellungen in der Seele des Kindes zu erzeugen; es soll das Kind nur veranlaßt werden, die gewonnenen Vorstellungen anzuwenden (s. §. 1, 1., die zweite Anmerkung). Sobald dieses der Fall ist, gebe der Lehrer die Aufgaben ohne alle Bemerkungen über ihre Lösung. Dieses wird hinreichend sein, wenn dabei die rechte Stufenfolge beobachtet wird. Sodann nöthige man den Schüler, über das Wesentliche der Aufgabe und den bei der Auflösung eingehaltenen Gang nachzudenken und beides in Worten auszusprechen. Es ist wünschenswerth, daß jede Aufgabe von den Schülern auf mehrerlei Art aufgelöst werde; die kürzeste Auflösungs-Art werde zuletzt als Regel aufgestellt.

Nach meiner Ansicht soll nämlich nach der Regel gerechnet werden, sobald der Schüler sich die in einer Aufgabe gegebenen Zahlen nicht mehr mit Leichtigkeit vorstellen kann. Wenn z. B. die Aufgabe gegeben ist: $3 \times 4 = ?$, so kann sich der Schüler leicht 4 Striche dreimal nebeneinandergestellt vorstellen; dagegen ist es dem Schüler nicht möglich, sich 30×400 in derselben Weise zu denken.

Beim Zusammenzählen größerer Zahlen, so wie später beim Abziehen, Vervielfachen und Entvielfachen, und überhaupt in allen Fällen, in welchen Regeln aufgestellt werden, bleibt es dem Schüler im Anfange überlassen, die ihm gegebene Aufgabe nach Gutdünken zu lösen; später werden die Schüler aufgefordert und angeleitet, unter den verschiedenen Auflösungsarten die leichteste und kürzeste herauszusuchen, welche, sobald sie von allen Schülern erkannt ist, als Regel aufgestellt wird. Die einmal aufgestellte Regel muß von allen Schülern pünktlich befolgt werden. Auch darf zu keiner Rechnungsart übergegangen werden, ehe die Schüler die vorhergehende mit Schnelligkeit nach der Regel zu behandeln verstehen.

Nachstehende Auflösungen, die aber keineswegs dem Schüler gegeben werden dürfen, mögen als Muster dienen.

1) $30 + 20 = ?$

Auflös. a. 30 + 20 = 3 Zehner und 2 Zehner = 5 Z. = 50 Einer.
b. 30 + 10 = 40; 40 + 10 = 50; also sind 30 + 20 = 50.
c. 30 = 3 × 10; 20 = 2 × 10; also sind 30 + 20 = 3 × 10 + 2 × 10 = (3 + 2) × 10 = 5 × 10 = 50.

Ich bemerke wiederholt, daß der Schüler jedes Mal den Sinn der Aufgabe und sein Verfahren bei der Auflösung in Worten auszusprechen hat. Er würde also nach der ersten Auflösung ungefähr so sprechen: Ich habe 20 zu 30 zählen sollen. Oder: Ich habe die Zahl suchen sollen, welche so viele Einheiten enthält, als die 2 Zahlen 30 und 20 zusammengenommen. Um diese Zahl zu finden, habe ich die 2 Zahlen in Zehnern angegeben, diese zusammengezählt, und die dadurch erhaltene Summe in Einer verwandelt.

Anm. Sollten diese Auflösungen von den Schülern nicht gefunden werden, so suche sie der Lehrer durch Fragen darauf zu führen; z. B. 30 sind wie viele Zehner? Und 20 sind wie viele Zehner? 30 + 20 sind also wie viele Zehner?

Würden die Schüler gar keine Auflösung finden, so wäre dies ein sicherer Beweis, daß sie das Vorhergehende noch nicht verstehen; deßhalb würden aber nicht die Schüler, sondern der Lehrer anzuklagen sein, der sich sicher Uebereilungen hätte zu Schulden kommen lassen. Ueberhaupt, wenn es nicht vorwärts gehen will; so suche der Lehrer den Fehler stets in sich und seiner Verfahrungsweise, und nicht in den Kindern. Denn ist der Unterricht deutlich, der Fassungskraft der Kinder angemessen, ihre Selbstthätigkeit weckend, und der Lehrer eifrig und liebevoll; so sind gewiß auch die Kinder aufmerksam, fleißig und folgsam. Auch hüte sich der Lehrer, Antworten deßhalb zu mißbilligen, weil sie anders lauten, als er erwartet und gewünscht hat; auf keinen Fall soll der, alles weitere Nachdenken störende, dem Kinde alles Selbstvertrauen und alle Liebe zum Denken raubende Zuruf: „das ist falsch!" ertönen. Ist die Antwort recht, nur nicht die erwartete, so muß sie der Lehrer gutheißen; ist sie unrichtig, so führe er das Kind durch Fragen zur Erkenntniß.

2) 30 + 14 = ?

Auflös. a. 14 = 10 + 4; 30 + 10 = 40; 40 + 4 = 44.
b. 30 = 3 Z.; 14 = 1 Z. + 4 E.; 3 Z. + 1 Z. = 4 Z. = 40 E.; 40 E. + 4 E. = 44 E. = 44.

3) 18 + 11 = ?

Auflös. a. 11 = 10 + 1; 18 + 10 = 28; 28 + 1 = 29.
b. 18 = 1 Z. + 8 E.; 11 = 1 Z. + 1 E.; 1 Z. + 1 Z. = 2 Z.; 8 E. + 1 E. = 9 E.; 2 Z. = 20 E.; 20 E. + 9 E. = 29 E.
c. 11 + 10 = 21; 21 + 8 = 29.

4) 499+54=?

Auflös. a. 499 = 490 + 9; 54 = 50 + 4; 490+50=540; 9+4 =13; 540+13=553.

b. 499=49 Z. + 9 E.; 54=5 Z.+4 E.; 49 Z.+5 Z. = 54 Z.; 9 E. + 4 E. = 13 E. =1 Z. + 3 E.; 54 Z. + 1 Z. = 55 Z.; 55 Z. = 550 E.; 550 E.+3 E.=553 E.=553.

c. 499=500—1; 500+54=554; 554—1=553.

d. 499 = 4 H. + 9 Z. + 9 E.; 54 = 5 Z. +4 E.; 4 H. + 9 Z. + 5 Z. = 4 H. + 14 Z. = 5 H. + 4 Z.; 9 E. + 4 E. =13 E. =1 Z. + 3 E.; 5 H. + 4 Z. +1 Z. =5 H. +5 Z. = 550 E.; 550 E. + 3 E. = 553 E. = 553.

e. 4 E. + 9 E. = 13 E. = 1 Z. + 3 E.; 1 Z. + 5 Z. = 6 Z.; 6 Z. + 9 Z. = 15 Z. = 1 H. + 5 Z.; 1 H. + 4 H. = 5 H.; 5 H. + 5 Z. + 3 E. = 553.

5) Hunderter, Zehner und Einer zu Hundertern, Zehnern und Einern. Z. B. 864 + 987 =?

Auflös. a. 864 + 900 = 1764 = 17 H. + 6 Z. + 4 E.; 87 = 8 Z. + 7 E.; 6 Z. + 8 Z. = 14 Z.; 4 E. + 7 E. = 11 E. = 1 Z. + 1 E.; 14 Z. + 1 Z. = 15 Z. = 1 H. + 5 Z.; 17 H. + 1 H. = 18 H. = 1800; 1800 + 5 Z. = 1800 + 50 = 1850; 1850 + 1 = 1851.

b. 864 + 900 = 1764; 1764 + 80 = 1844; 1844 + 7 = 1851.

c. 864 = 8 H. + 6 Z. + 4 E.; 987 = 9 H. + 8 Z. + 7 E.; 7 E. + 4 E. = 11 E. = 1 Z. + 1 E.; 1 Z. + 8 Z. = 9 Z.; 9 Z. + 6 Z. = 15 Z. = 1 H. + 5 Z.; 1 H. + 9 H. + 8 H. = 18 H.; 18 H. + 5 Z. + 1 E. = 1851.

In den vorstehenden Beispielen sind Auflösungsarten bezeichnet, die möglicher Weise von den Schülern aufgefunden werden. Es mußte für jetzt noch jedem Schüler überlassen bleiben, eine Aufgabe auf die ihm anschaulichste Weise zu lösen, jedoch unter der Bedingung, daß er über die Art seines Verfahrens Rechenschaft zu geben verpflichtet war, um es den übrigen Schülern möglich zu machen, das eingehaltene Verfahren zu begreifen und vorkommenden Falles denselben Weg einzuschlagen. Selbst verfehlte Versuche dürfen nicht geradezu zurückgewiesen werden; sondern man benütze sie, den Blick

des Schülers zu schärfen, indem man ihn seinen zurückgelegten Weg überschauen und seine Auflösung ins Einzelne verfolgen läßt.

Der erste allgemeine Satz, der zum Bewußtsein der Schüler zu bringen ist, heißt:

Nur Gleichnamiges kann zusammengezählt werden.

So wie 3 Aepfel + 4 Birnen weder 7 Aepfel noch 7 Birnen, wol aber 7 Stücke Obst sind; so können auch Zehner und Einer, oder Zehner und Hunderter nur zusammengezählt werden, wenn sie vorher gleichnamig gemacht worden sind.

Ferner sind die Kinder zu gewöhnen, größere Zahlen, welche sie nicht leicht überschauen können, zu Einheiten höherer Ordnungen zusammenzufassen. Ist z. B. die Aufgabe gegeben: 700 + 800 =? so ist es dem Schüler nicht möglich, sich so viele Einheiten der ersten Ordnung vorzustellen, als diese Posten betragen. Wenn der Schüler auch spricht: 700+800=1500; so denkt er sich doch nur 8 Einheiten zu 7 Einheiten genommen und fügt der Summe dieser Einheiten die Benennung „hundert" bei. Man stelle daher die Regel auf:

Einheiten höherer Ordnungen müssen stets als Einheiten dieser höheren Ordnungen aufgefaßt werden.

Hiernach hat der Schüler die obige Aufgabe auf folgende Weise zu lösen: 700+800=7 H. + 8 H. = 15 H. = 1500.

Die Kinder werden nun auch mit den Benennungen: Posten und Summe (s. Rechenunterricht §. 4. Anmerk.) bekannt gemacht, wenn dieses nicht schon früher geschehen ist.

3) Angewandte Aufgaben können immer erst dann folgen, wenn das Rechnen mit reinen Zahlen bis zur Fertigkeit geübt ist. Wenn der Sinn der Einkleidung bei den angewandten Aufgaben das Denken der Kinder sehr in Anspruch nimmt, so darf die Operation mit den Zahlen selbst nicht mehr vieles Nachsinnen erfordern; es dürfen daher in solchem Falle die Zahlen nicht zu groß sein. Auch kann man nöthigenfalls so lange ähnliche Aufgaben in ganz kleinen Zahlen geben, bis die Kinder den Sinn der Aufgabe erfaßt haben. Die Antworten zu §. 10, I. a. von Nr. 5 an sind:

5) 29. 36. 50. 65. 78. 73. 87. 140. 182.

6) 131. 480. 862. 710. 553. 711. 1470.

7) 527. 1155. 1851. 1062.

b.

1) 170 fl. 2) 1226 Soldaten. 3) 504 Obstbäume. 5) 63. 6) 136. 7) 65. 8) 90. 9) 86. 10) 62. 11) 55. 12) 95. 13) 79. 14) 96. 15) 75.

II. Schriftlich.*)

Sollen mehrere Zahlen zusammengezählt werden; so zählt man gewöhnlich zuerst zwei zusammen, dann zu der dadurch entstandenen Zahl die dritte, zu dem neuen Ergebniß die vierte u. s. w.

Bisher wurden die Auflösungen von den Kindern auch jedes Mal aufgeschrieben, d. h. sie schrieben Alles nieder, was sie bei der mündlichen Berechnung gesprochen hatten. Das schriftliche Verfahren, das nun folgt, unterscheidet sich für jetzt noch von dem frühern allein dadurch, daß die einzelnen Posten senkrecht unter einander geschrieben werden, so daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen. Die allmählige Verbindung der Posten kann in jeder beliebigen Ordnung vorgenommen werden, da die Summe in jedem Falle so viele Einheiten enthalten muß, als alle Posten zusammengenommen. Es bleibt daher dem Schüler überlassen, vorn oder hinten, oben oder unten anzufangen; nur werde er gehalten, die beim mündlichen Rechnen aufgestellte Regel zu befolgen. Dadurch wird die Aufgabe gleichsam in so viele einzelne Aufgaben zerlegt, als Einheiten von Ordnungen da sind. Damit die Einheiten der gleichnamigen Ordnungen gehörig unter einander zu stehen kommen, lasse man im Anfange feine senkrechte Striche ziehen. Ist nun etwa die Aufgabe gegeben, 324, 578 und 659 zu addieren; so sind die möglichen Auflösungsweisen etwa folgende:

a. 3|2|4 = 3 H. + 2 Z. + 4 E.
5|7|8 = 5 H. + 7 Z. + 8 E.
6|5|9 = 6 H. + 5 Z. + 9 E.

14 H. + 14 Z. + 21 E. = 1561.

Der Strich unter den Posten bedeutet, daß keine weiteren Zahlen

*) Das Schriftlichrechnen findet in der Regel dann statt, wenn große Zahlen, oder die Menge der Zahlen, oder zusammengesetzte Operationen das Gedächtniß zu sehr erschweren würden; die Ziffern dienen nur zur Unterstützung des Gedächtnisses.

zum Addieren gegeben werden; die Summe pflegt man unter diesen Strich zu schreiben.

b.

	3	2	4
	5	7	8
	6	5	9
1	4	0	0
	1	4	0
		2	1
1	5	6	1

c.

324
578
659
21
140
1400
1561

d.

	3	2	4	21 E.
	5	7	8	16 Z.
	6	5	9	15 H.
1	5	6	1	

Im letzten Falle könnte der Schüler sprechen: 9E.+8E.=17E.; 17 E. + 4 E. = 21 E. = 2 Z. + 1 E.; 1 E. setze ich unter die Einer, und zähle die 2 Z. zu den Zehnern. 2 Z. + 5 Z. = 7 Z.; 7Z.+7Z. =14 Z.; 14 Z. + 2 Z. = 16 Z. = 1 H. + 6 Z.; die 6 Z. werden unter die Zehner gesetzt und 1 H. wird zu den Hundertern gezählt. 1 H. + 6 H. = 7 H.; 7 H. + 5 H. = 12 H.; 12 H. + 3 H. = 15 H. = 1 T. + 5 H. Die 5 H. werden unter die Hunderter und 1 T. in die vierte Stelle gesetzt.

Endlich werden die Schüler finden, daß es am bequemsten ist, zuerst die Reihe der Einer zusammenzuzählen, die etwa darin enthaltenen Zehner herauszuziehen und die übrig bleibenden Einer unter die Einer zu schreiben, die herausgezogenen Zehner zu der Reihe der Zehner zu addieren, aus dieser Summe die Hunderter zu nehmen, die übrigen Zehner unter die Zehner zu schreiben und die herausgezogenen Hunderter zu den Hundertern zu zählen u. s. w. Sobald dieses der Fall ist, so stelle man die **Regel** für das Zusammenzählen unbenannter Zahlen auf:

I. **Wenn mehrstellige Zahlen zusammengezählt werden sollen; so zähle, von den Einheiten der niedersten Ordnung angefangen, die Einheiten der gleichnamigen Ordnungen zusammen. Sind in der Summe der Einheiten einer Ordnung Einheiten einer höhern Ordnung enthalten; so ziehe man diese heraus und zähle sie zu den Einheiten dieser höhern Ordnung.**

Anm. I. Haben die Kinder hinlängliche Fertigkeit im Zusammenzählen erlangt, so ist es nicht mehr nothwendig, die Benennungen Einer, Zehner u. s. w. jedes Mal aussprechen zu lassen. Eben so wird bei **einfach benannten Zahlen** (z. B. 6 fl. + 4 fl., siehe §. 14) die Benennung während der Addition weggelassen und nur der Summe beigefügt.

Anm. II. Es ist manchmal der Fall, daß die zu addierenden Posten fortlaufend auf mehreren Seiten stehen, z. B. in einem Haushaltungsbuche; alsdann zählt man die Zahlen zusammen, welche auf einer Seite stehen, und schreibt den Betrag der Seite, Seitenbetrag (Latus) genannt, unten hin, aber auch auf die nächstfolgende Seite als ersten Posten oben an, mit dem Namen Uebertrag (Transport) und addiert ihn zu den übrigen Posten dieser Seite. Der Betrag dieser Seite wird wieder unten auf der Seite selbst, aber auch auf der nächstfolgenden Seite oben angemerkt, und so fortgefahren.

Die Antworten zu den schriftlichen Aufgaben sind: 2) 45. 3) 390. 4) 345. 5) 735. 6) 48. 7) 57. 8) 72. 9) 103. 10) 114. 11) 283. 12) 307. 13) 523. 14) 344. 15) 1719. 16) 387. 17) 713. 18) 1188. 19) 1022. 20) 1338. 21) 450 + 112 + 227 + 492 + 57 = 1026; 638 + 594 + 789 + 456 + 789 = 3266. 639 + 936 + 877 + 699 + 588 = 3739; 789 + 567 + 896 + 543 + 698 = 3493. 23) 1829. 24) 238. 25) 27399 fl. 26) 3983. 27) 1987. 28) 20510. 29) 375939. 30) 205578. 31) 59137907. 32) 5055017729778.

Anm. Die Probe bei der Addition wird durch die Subtraktion ausgeführt. Zieht man nämlich von der Summe aller Posten einen Posten ab, so muß die Summe aller übrigen Posten übrig bleiben.

§. 11.

Das Abziehen (Subtraktion) größerer Zahlen.

I. Mündlich.

a.

1) Es kommen beim Abziehen ohne Ziffern folgende Uebungen vor:
   1. Zehner von Zehnern.
   2. Zehner von Hundertern, und Zehner von Hundertern und Zehnern.
   3. Hunderter von Hundertern, Hunderter und Zehner von Hundertern, und Hunderter von Hundertern und Zehnern.
   4. Zehner von Zehnern und Einern, Zehner und Einer von Zehnern, und Zehner von Hundertern, Zehnern und Einern.
   5. Hunderter und Zehner von Hundertern und Zehnern.
   6. Zehner und Einer von Zehnern und Einern.
   7. Zehner und Einer von Hundertern, Zehnern und Einern.

Den befähigteren Schülern können auch Aufgaben gegeben werden, in denen Hunderter, Zehner und Einer von Hundertern, Zehnern und Einern abgezogen werden.

2) Unter dem Unterschiede oder der Differenz zweier Zahlen versteht man diejenige Zahl, welche man zur zweiten addieren muß, um die erste zu erhalten. Den Unterschied zweier Zahlen finden, heißt die zweite von der ersten abziehen (subtrahieren). Die erste wird die Vollzahl (der Minuendus), die zweite die Abzugszahl (der Subtrahendus) genannt; beide führen auch den gemeinschaftlichen Namen der Glieder des Unterschiedes.

Rücksichtlich des Lehrverfahrens gelten die in §. 10, 2) gegebenen Vorschriften. Der Lehrer gebe auch hier die Aufgaben ohne alle Bemerkungen über ihre Lösung. Wesentlich ist es, den Schüler zur Einsicht der Wahrheit zu führen, daß nur Gleichnamiges von einander abgezogen werden kann.

Es folgt nun die Auflösung einer Aufgabe in verschiedener Weise, um die verschiedenen Auflösungsweisen anschaulich zu machen. Werden diese Auflösungen von den Schülern nicht gefunden, so hat sie der Lehrer in die Frageform zu kleiden. Es versteht sich von selbst, daß sich der Lehrer nicht auf die Aufgaben im „Rechenunterricht" beschränken darf; er muß jeder Aufgabe so lange Aufgaben nachbilden, bis die Sache verstanden und tüchtig eingeübt ist, und auch die Kinder auf jeder Stufe zum Bilden ähnlicher Aufgaben anhalten.

547—298=?

Auflös. a. 547 — 200 = 347; 347 = 34 Z. + 7 E.; 98 = 9 Z. + 8 E.; 34 Z. — 9 Z. = 25 Z. = 250 E.; 250 E. + 7 E. = 257 E.; 257 E. — 8 E. = 249 E.

b. 298 = 300 — 2. Wenn ich also 300 abziehe, so habe ich 2 zu viel abgezogen; folglich muß ich dann noch 2 zuzählen. 547 — 300 = 247; 247 + 2 = 249.

c. 547=54 Z. +7 E.; 298=29 Z. +8 E.; 54 Z. —29 Z. =25 Z. =250 E.; 250 E. +7 E. =257 E.; 257 E.—8 E. = 249 E.

d. 547 = 500 + 47; 298 = 200 + 98; 500 — 200 = 300; 300—98=202, dazu noch 47 gibt 249.

e. 547 = 5 H. + 4 Z. + 7 E.; 298 = 2 H. + 9 Z. + 8 E. Von 7 E. kann ich 8 E. nicht hinwegnehmen; ich nehme daher 1 Z. von den 4 Zehnern in der Vollzahl und verwandle ihn in Einer. 1 Z. = 10 E.; 10 E. — 8 E. = 2 E.; 2 E. + 7 E. = 9 E. Von 3 Z. kann ich 9 Z. nicht hinwegnehmen; ich nehme daher von den 5 H. in

der Vollzahl 1 H. und verwandle ihn in Zehner. 1 H. = 10 Z.; 10 Z. — 9 Z. = 1 Z.; 1 Z. + 3 Z. = 4 Z.; 4 H. — 2 H. = 2 H.; 2 H. + 4 Z. + 9 E. = 249.

Anm. Es bleibt jedem Schüler überlassen, die ihm bequemste Art vorzugsweise zu gebrauchen.

Wie der Schüler das Wesentliche dieser Aufgaben und sein Verfahren bei der Auflösung in Worten aussprechen kann, sei in Nachstehendem angedeutet: Die obige Aufgabe verlangt die Bestimmung des Unterschiedes zweier gegebenen Zahlen; beide Zahlen bestehen aus Hundertern, Zehnern und Einern. Ich habe bei der ersten Auflösung von der Vollzahl so viele Einheiten hinweggenommen, als die Hunderter in der Abzugszahl angeben, sodann sowol den Rest der Vollzahl, als den Rest der Abzugszahl in Zehnern und Einern ausgedrückt, von den Zehnern der Vollzahl die Zehner der Abzugszahl hinweggenommen, die übrig gebliebenen Zehner der Vollzahl in Einer verwandelt, die Einer der Vollzahl dazu gezählt und hiervon die Einer der Abzugszahl hinweggenommen.

Eine solche allgemeine Bezeichnung des Verfahrens bei der Auflösung kann jedoch von dem Schüler nicht gefordert werden; man verlange auf dieser Stufe nie mehr, als die Angabe des Verfahrens in dem einzelnen Falle.

Anm. Nebstdem, daß der Schüler sein Verfahren bei jeder Auflösung in Worten anzugeben hat, stelle der Lehrer noch Fragen, wie die folgenden:

Welche Zahl hast du abgezogen? Von welcher Zahl hast du abgezogen? Welche Zahl hast du durch das Abziehen erhalten? Ist die Abzugszahl so groß, als die Vollzahl? Ist der Rest so groß, als die Abzugszahl? Ist der Rest gleich der Vollzahl? Welche Zahl beträgt so viel, als die 2 andern zusammengenommen?

Die Antworten zu den zur mündlichen Berechnung gegebenen Aufgaben sind:

12) 183, 472, 484, 1525, 7915.

13) 212, 111, 292, 261, 159, 249, 191, 377, 583, 375.

14) 1209, 2532, 4403, 6501, 4311, 4658, 6453, 854, 581, 348.

b.

1) 27. 2) 63. 3) 46. 4) 48. 5) 53. 6) 146. 7) 1618. 8) 40. 9) 29. 10) 74. 11) 97. 12) 66. 13) 58. 14) 59. 15) 65. 16) 127. 17) 55. 18) 330.

c.

1) 164. 2) 104. 3) 309. 4) 131. 5) Man findet den Rest, wenn

man von der Vollzahl so viele Einheiten hinwegnimmt, als die Abzugszahl angibt. Zählt man den Rest zu der Abzugszahl, so erhält man die Vollzahl. Die Abzugszahl ist gleich der Vollzahl, weniger dem Reste. Der Unterschied zweier Zahlen wird gefunden, wenn man die kleinere Zahl von der größern abzieht.

Anm. Die Aufgaben unter c. werden erst bei der Wiederholung vorgenommen, und deren Auflösung den schwächeren Schülern erlassen.

II. Schriftlich.

Das schriftliche Abziehen unterscheidet sich von dem mündlichen dadurch, daß die Vollzahl, die Abzugszahl und der Rest mit Ziffern geschrieben werden; die Schüler müssen daher die Subtraktionsaufgaben, welche bisher vorgekommen sind, auch schriftlich berechnen können, wobei von Seiten des Lehrers nur zu bemerken ist, daß gewöhnlich die Abzugszahl unter die Vollzahl geschrieben (so daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen), und der Rest durch einen wagerechten Strich von der Abzugszahl getrennt wird. Hat der Schüler die bei der mündlichen Berechnung vorgekommenen Aufgaben einmal schriftlich berechnet, so wird er sich auch bei Aufgaben mit größeren Zahlen zu helfen wissen. Das Verfahren beim schriftlichen Abziehen wird an nachstehenden Beispielen deutlich werden:

1) Es sei die Vollzahl	9	6	8	=	9 H. + 6 Z. + 8 E.
Die Abzugszahl	3	5	4	=	3 H. + 5 Z. + 4 E.
so ist der Rest	6	1	4	=	6 H. + 1 Z. + 4 E.

Nämlich: 4 E. von 8 E. hinweggenommen, bleiben 4 E.; 6 Z.— 5 Z. bleibt 1 Z.; 9 H. — 3 H. bleiben 6 H. — Der Rest ist also = 614.

2)	6 3[1]4	= 6 H. + 3 Z. + 4 E.	= 6 H. + 2 Z. + 14 E.
	—2 1 7	= 2 H. + 1 Z. + 7 E.	= 2 H. + 1 Z. + 7 E.
	4 1 7		= 4 H. + 1 Z. + 7 E.

Es kann immer nur Gleichnamiges von einander abgezogen werden, d. h. Einer von Einern, Zehner von Zehnern u. s. w.; da nun 7 Einer nicht da weggenommen werden können, wo nur 4 Einer sind, so muß 1 Zehner von den 3 Zehnern genommen (was bei den Zehnern durch einen kleinen Einser oben bemerkt wird) und in Einer verwandelt werden. 7 E. von 10 E. bleiben 3 Einer, dazu noch die

4 E. der Vollzahl, so hat man 7 E.; 1 Z. von 2 Z. bleibt 1 Z.; 2 H. von 6 H. bleiben 4 H.; mithin bleiben Rest 417.

3) $5^{1}0^{1}2^{1}4$
 1478
―――――
 3546

8 E. können von 4 E. nicht abgezogen werden; man nimmt daher 1 Z. von den 2 Z. und verwandelt diesen in Einer; 1 Z. = 10 E.; 8 E. von 10 E. = 2 E., dazu noch 4 E., geben 6 E.; 7 Z. können nicht da weggenommen werden, wo nur noch 1 Z. ist; weil aber keine H. vorhanden sind, so nehme ich 1 T.; 1 T. = 10 H.; von diesen 10 H. nehme ich 1 H. zu den Zehnern, es bleiben also 9 H. in der dritten Stelle. 1 H. = 10 Z.; 7 Z. von 10 Z. bleiben 3 Z., dazu noch 1 Z., so erhalte ich 4 Z.; 4 H. von 9 H. = 5 H.; 1 T. von 4 T. bleiben 3 T.; der Rest ist also = 3546.

4) $5^{1}\,0^{1}\,0^{1}\,0$ od. $5^{1}\,0^{9}\,0^{9}\,0^{1}$ od. 5000 = 4 T. + 9 H. + 9 Z. + 10 E.
 2345 2345 2345 = 2 T. + 3 H. + 4 Z. + 5 E.
――――― ――――― ―――――――――――――――――
 2655 2655 2 T. + 6 H. + 5 Z. + 5 E.

In der ersten, zweiten und dritten Stelle der Vollzahl sind Nullen; um daher die 5 Einer, 4 Zehner und 3 Hunderter abziehen zu können, muß 1 Tausender geliehen werden. Nun verwandelt man diesen Tausender in Hunderter; 1 T. = 10 H.; von diesen 10 Einheiten der dritten Ordnung bleiben 9 in der dritten Stelle liegen, und 1 H. wird zu den Zehnern genommen und gibt 10 Z. Von diesen 10 Zehnern nehme ich einen zu den Einern, es bleiben also in der zweiten Stelle 9 übrig. 5 E. von 10 E. = 5 E.; 4 Z. von 9 Z. = 5 Z.; 3 H. von 9 H. = 6 H.; 2 T. von 4 T. = 2 T.

Wurden die Kinder gewöhnt, ihr Verfahren bei jeder Auflösung in Worten auszusprechen; so werden sie nun leicht folgende Regel für das Abziehen unbenannter Zahlen finden:

II. Sollen unbenannte Zahlen von einander abgezogen werden; so ziehe man die Zahlen der gleichnamigen Ordnungen, von der niedersten angefangen, von einander ab. Wenn bei irgend einer Ordnung in der Vollzahl weniger Einheiten als in der Abzugszahl sind; so nehme man eine Einheit der nächst höheren Ordnung, von welcher Einheiten gegeben sind, verwandle sie in Einheiten der niederen Ordnung, ziehe hievon die Abzugszahl ab

und zähle die in der Vollzahl ursprünglich gegebenen Einheiten dieser Ordnung dazu.

Anm. I. Haben die Kinder hinlängliche Fertigkeit im Abziehen erlangt, so ist es nicht mehr nothwendig, die Benennungen: Einer, Zehner u. s. w. jedes Mal aussprechen zu lassen. Eben so wird bei einfach benannten Zahlen die Benennung während der Subtraktion weggelassen und nur dem Reste beigefügt.

Anm. II. In der Regel sucht man sich von der Richtigkeit einer Abziehung dadurch zu überzeugen, daß man die Abzugszahl zu dem Reste addiert, und die dadurch erhaltene Summe mit der Vollzahl vergleicht. Ist die Summe des Restes und der Abzugszahl gleich der Vollzahl, so ist die Rechnung richtig. Ein solches Verfahren heißt man die Probe. Unter Probe versteht man im Allgemeinen dasjenige Verfahren, welches uns von der Richtigkeit einer Rechnung überzeugt. Will man sich versichern, ob in der Berechnung einer Additionsaufgabe kein Versehen begangen wurde, so wiederhole man dieselbe in entgegengesetzter Ordnung, von oben nach unten, wenn man zuerst von unten nach oben gerechnet hat, und so umgekehrt. Bei dieser Wiederholung pflegt man einen Summanden nicht mitzuzählen; die zuerst erhaltene Summe ist alsdann die Vereinigung aller Posten, die zweite ist die Vereinigung aller Posten, den nicht mitgezählten ausgenommen. Wird daher letztere Summe von der ersteren abgezählt, so muß der ausgelassene Posten wieder zum Vorschein kommen. Ergibt sich eine andere Zahl, so ist entweder in der Addition, oder in der Probe, oder in beiden gefehlt.

Man gewöhne die Schüler, zu allen Aufgaben die Probe zu machen.

Die Antworten zu den schriftlichen Aufgaben sind:

2) 347. 3) 74 Jahre. 4) 1016 fl. 5) 4961 fl. 6) 2822 fl. 7) 32561 Mann. 8) 18947. 9) 411 fl. 10) 20911336. 11) 1217. 12) 67802. 13) 188356. 14) 525903. 15) 580000. 16) 593320; 7214306; 3082236; 6883084; 1211110110303.

§. 12.

Das Vervielfachen (Multiplikation) größerer Zahlen.

I. Mündlich.

a.

1) Beim mündlichen Vervielfachen kommen folgende Fälle vor:

1. Die Vervielfachungszahl besteht aus Zehnern, Hundertern, Tausendern, Zehntausendern, Zehnern und Einern, Hundertern und Zehnern, Hundertern, Zehnern und Einern; der Vervielfacher besteht aus Einern.

2. Die Vervielfachungszahl besteht aus Einern, Zehnern, Zehnern und Einern, Hundertern; der Vervielfacher besteht aus Zehnern.

3. Die Vervielfachungszahl besteht aus Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern; der Vervielfacher besteht aus Hundertern.

4. Die Vervielfachungszahl besteht aus Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern; der Vervielfacher besteht aus Tausendern.

5. Die Vervielfachungszahl besteht aus Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern, Zehnern und Einern, Hundertern und Zehnern, Hundertern und Einern; der Vervielfacher besteht aus Zehnern und Einern.

Der Schüler hat jedes Mal anzugeben, welcher dieser Fälle in der Aufgabe vorkommt.

2) Vervielfachen (multiplizieren) heißt eine Zahl so vielmal nehmen, als eine andere anzeigt. (S. „Rechenunterricht" §. 6, Anm.). Rücksichtlich des Lehrverfahrens gelten auch hier die §. 10, 2. gegebenen allgemeinen Bestimmungen.

Wenn beide Vielfacher aus Einern bestehen, so soll sich der Schüler die Vervielfachungszahl so viel mal genommen vorstellen, als der Vervielfacher Einheiten enthält. Z. B. 2 × 3 = ||| |||. Kommen in der Vervielfachungszahl Einheiten höherer Ordnungen vor, so sollen diese (wenigstens so lange, bis der Schüler hinlängliche Fertigkeit im Vervielfachen hat) als Einheiten solcher Ordnungen aufgefaßt werden. Z. B. 7×900=7×9 Hunderter = 63 H. = 6300.

Da die Auflösungen schon größtentheils im „Rechenunterrichte" angedeutet sind, so werden einige Beispiele zur Erläuterung hinreichen.

1) 2 × 12 =?

Auflös. a. 2×12=12+12=24.

Es sind 2 Zahlen zum Vervielfachen gegeben; die Vervielfachungszahl besteht aus Zehnern und Einern, der Vielfacher aus Einern. — 12 mit 2 vervielfachen, heißt 12 zweimal nehmen; man erhält also 12+12=24.

b. 12=1 Z. +2 E.; also ist 2×12=2×1 Z. + 2×2 E. — 2×1 Z. = 2 Z.; 2×2 E. = 4 E.; 2 Z. = 20 E.; 20 E. + 4 E. = 24 E. = 24.

Ich habe zuerst 12 in 1 Z. + 2 E. zerlegt, hierauf sowol den 1 Z., als die 2 E. zweimal genommen, und die beiden

Vielfache zusammengezählt, nachdem ich die 2 Z. in E. verwandelt hatte.

2) $10 \times 6 = 10 \times 6$ Einern $= 6$ Zehnern $= 60$; $10 \times 40 = 10 \times 4$ Z. $= 40$ Zehnern $= 4$ Hundertern $= 400$; $10 \times 300 = 10 \times 3$ H. $= 30$ H. $= 3$ Tausendern $= 3000$; $10 \times 1000 = 10 \times 1$ T. $= 10$ T. $= 1$ Zehntausender $= 10000$.

Der Schüler weiß schon, daß nach dem Zehnergesetze 10 Einheiten einer Ordnung immer 1 Einheit der nächsthöhern Ordnung geben. Daraus ergibt sich leicht die Regel:

III. **Wenn man irgend eine Zahl mit 10 vervielfacht, so erhält man eben so viel Einheiten der nächsthöhern Ordnung.**

3) $40 \times 300 = ?$

Auflös. $40 = 10 \times 4$; 4×3 H. $= 12$ H.; 10×12 H. $= 12$ T. $= 12000$.

Es sollen 2 Zahlen vervielfacht werden: die Vervielfachungszahl besteht aus Hundertern, der Vervielfacher (für sich, als Zahl betrachtet) aus Zehnern. Ich habe die Vervielfachungszahl 4 Mal, dann das dadurch erhaltene Vielfache 10 Mal genommen, und so 12000 erhalten. Wollte man die Aufgabe mit Strichen darstellen; so müßte man zehnmal 4×300 Striche zeichnen.

Betrachtet man 40 als Vervielfachungszahl und 300 als Vervielfacher; so erhält man dasselbe Ergebniß. $300 = 3 \times 100$; 3×4 Z. $= 12$ Z.; 100×12 Z. $= 12$ T. $= 12000$. Wollte man dies mit Strichen darstellen; so müßte man hundert Mal 3×40 Striche zeichnen.

4) $13 \times 19 = ?$

Auflös. a. $13 = 10 + 3$; $10 \times 19 = 190$; $3 \times 19 = 3 \times 10 + 3 \times 9 = 30 + 27 = 57$; $190 + 50 = 240$; $240 + 7 = 247$.

Es waren 2 Zahlen zu vervielfachen, welche beide aus Zehnern und Einern bestehen. Ich habe zuerst 13 in $10 + 3$ zerlegt, hierauf die Vervielfachungszahl zehnmal und alsdann die Vervielfachungszahl auch dreimal genommen, und die beiden Vielfache zusammengezählt. Wollte man nach dieser Auflösung die Aufgabe mit Strichen darstellen; so müßte man 10×19 und 3×19 Striche zeichnen.

b. $13 \times 19 = 10 \times 1$ Z. $+ 10 \times 9$ E. $+ 3 \times 1$ Z. $+ 3 \times 9$ E. 10×1 Z. $= 1$ H.; 10×9 E. $= 9$ Z.; 3×1 Z. $= 3$ Z.; 3×9 E. $= 27$ E. $= 2$ Z. $+ 7$ E.

9 Z. + 3 Z. + 2 Z. = 14 Z. = 1 H. + 4 Z.; 1 H. + 1 H. = 2 H.; 2 H. + 4 Z. + 7 E. = 247.

Auf den Unterschied zwischen 13 × 19 und 30 × 19 und auf das Zerlegen der Vervielfachungszahl 19 in die 2 Posten 10 + 9 = 1 Z. und 9 E. sind die Kinder besonders aufmerksam zu machen.

c. 13 × 19 = 13 × 20 — 13 × 1; 13 × 20 = 13 × 2 Z. = 26 Z. = 260; 13 × 1 = 13; 260 — 13 = 247.

Anm. I. Nebst dem, daß die Schüler bei jeder Aufgabe das Wesentliche derselben, so wie ihre Verfahrungsweise in Worten angeben müssen; so gebe der Lehrer noch Fragen wie die folgenden:

Welche Zahl hast du mehrere Mal genommen? — Welche Zahl hast du also vervielfacht? — Welchen Namen führt die Zahl, welche vervielfacht wird? — Welches ist also die Vervielfachungszahl? — Welches ist der Vervielfacher? — Welchen gemeinschaftlichen Namen haben die Vervielfachungszahl und der Vervielfacher? — Sind die zwei Vielfacher (Faktoren) einander gleich, oder sind sie ungleich? — Welches ist der größere, welches der kleinere Vielfacher (Faktor)? — Wurden die beiden Vielfacher in der Aufgabe gegeben? — Sind die 2 Vielfacher also bekannte oder unbekannte Zahlen? — Welche Zahl hast du durch das Vervielfachen erhalten? — Wie heißt man die Zahl, welche durch das Vervielfachen gefunden wird? — Welches ist das Vielfache (Produkt) dieser 2 Zahlen? — Das Vielfache ist wie vielmal so groß, als die Vervielfachungszahl? — Werden beim Darstellen der Aufgaben mit Strichen beide Vielfacher dargestellt? Warum wird der Vervielfacher nicht dargestellt? Was zeigt der Vervielfacher nur an? Wird die Vervielfachungszahl so vielmal dargestellt, als der Vervielfacher anzeigt?

Anm. II. Wenn die beiden Vielfacher unbenannt sind, so kann jeder als Vervielfachungszahl angesehen werden; denn der Werth des Produktes hängt nicht von der Ordnung der Faktoren ab. Anders ist es, wenn die Aufgabe bestimmter gefaßt ist; z. B. zweimal 12 = ? oder: 12 soll 2 Mal genommen werden. Das Produkt bleibt dasselbe, welche von den beiden Zahlen als Vervielfacher angenommen wird; aber die Anschauung ändert sich. Ist in 2 × 12 zwei der Vervielfacher, so erhalten wir 12 + 12, oder | | | | | | | | | | | | + | | | | | | | | | | | |; ist hingegen 12 der Vervielfacher, so erhält man 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2, oder || || || || || || || || || || || ||. In der Regel nehmen die Kinder die kleinste, oder die zuerst ausgesprochene Zahl als Vervielfacher an. Wenn es nun aber auch erlaubt ist, von 2 unbenannten Faktoren jeden als Vervielfacher anzusehen; so ist es doch unumgänglich nothwendig, daß der Schüler beim Ausrechnen klar wisse, welches der Vervielfacher und welches die Vervielfachungszahl ist; und man lasse ihn daher die Aufgaben so aussprechen, daß man daraus erkennen kann, welche Zahl er als Vervielfa-

chungszahl betrachtet. Ist z. B. die Aufgabe: 20 × 3 = ? gegeben; so kann sowol 3, als auch 20 als Vervielfachungszahl angesehen werden. Im ersten Falle heißt die Aufgabe: 3 soll mit 20 vervielfacht (20 Mal genommen) werden; im zweiten Falle: 20 soll mit 3 vervielfacht werden. Nehme ich 3 zweimal und dieses Zweifache zehnmal; so habe ich 3 mit 20 vervielfacht. ///./// ///./// ///./// ///./// ///./// ///./// ///./// ///./// ///./// ///.///. Nehme ich 20 dreimal; so ist 20 die Vervielfachungszahl und 3 Vervielfacher:

//////////.////////// //////////.////////// //////////.//////////. — Es ist schon wiederholt bemerkt worden, daß beim Darstellen mit Strichen nur die Vervielfachungszahl dargestellt wird, und der Vervielfacher nicht.

Anm. III. Das Vervielfachen der Zahlen von 10 bis 20 mit den Zahlen von 1 bis 10 muß auch in Reihenfolgen geübt werden; z. B. 1, 2, 3 ...... 10 × 11 u. s. w. bis 1, 2, 3 ...... 10 × 19.

b.

Ist der Schüler gewöhnt, sowol die Faktoren als das sich ergebende Produkt mit Bewußtsein anzuschauen; so wird er die Wahrheit folgender höchst wichtiger Sätze (auf welche er durch Fragen zu leiten ist) leicht einsehen:

1) Wenn die Vervielfachungszahl und der Vervielfacher aus Einern bestehen, so erhält man auch im Produkte Einer; z. B. 4 × 6 = 24 Einer. In 24 sind zwar auch 2 Zehner enthalten, allein wenn ich 4 Einer sechsmal, oder 6 Einer viermal nehme (und nur eine dieser 2 Annahmen sind bei der Aufgabe 4 × 6 möglich), so erhalte ich nothwendig 24 Einer. Dieser Behauptung kann also nicht damit widersprochen werden, daß 24 Einer aus 2 Zehnern und 4 Einern bestehen, denn man könnte, unbeschadet des Werthes, 24 Einer auch in Zehntel oder Hundertstel u. s. w. ausdrücken.

2) Wenn der eine Faktor aus Zehnern und der andere aus Einern besteht; so erhält man im Produkt Zehner.

Z. B. 4 × 30 = 4 × 3 Z. = 12 Z.

Nimmt man eine gewisse Anzahl Zehner 1, 2, 3 ..... 9 Mal, so erhält man natürlicher Weise im Vielfachen Zehner.

Oder: 30 × 4 = 30 × 4 E. = 10 × 3 × 4 E. = 10 × 12 E. = 12 Z.

Das Ausdrücken dieses Produktes in Hundertern und Zehnern muß stattfinden, sobald es auf die gewöhnliche Weise mit Ziffern niedergeschrieben werden soll: 12 Z. = 120.

3) Besteht der eine Faktor aus Hundertern, Tausendern, Zehntausendern u. s. w., und der andere Faktor aus Einern; so erhält man auch im Produkt Hunderter, Tausender, Zehntausender u. s. w.

Z. B. $6 \times 800 = 6 \times 8$ H. $= 48$ H.
$7 \times 5000 = 7 \times 5$ T. $= 35$ T.
$9 \times 60000 = 9 \times 6$ Zehnt. $= 54$ Zt.
Oder: $800 \times 6 = 800 \times 6$ E. $= 10 \times 10 \times 8 \times 6$ E.
$= 10 \times 10 \times 48$ E. $= 10 \times 48$ Z. $= 48$ H.
$5000 \times 7 = 1000 \times 5 \times 7$ E. $= 1000 \times 35$ E. $= 35$ T.
$60000 \times 9 = 10000 \times 6 \times 9$ E. $= 10000 \times 54$ E. $=$ 54 Zt. —

4) Wenn beide Faktoren aus Zehnern bestehen; so erhält man im Produkte Hunderter.

Z. B. $40 \times 80 = 10 \times 4 \times 8$ Z. $= 10 \times 32$ Z. $= 32$ H.

Besteht der Vervielfacher für sich betrachtet aus Zehnern, so kann er sein: 20, 30, 40 . . . . 90. Man vervielfacht mit 20, 30, 40 . . . . 90, indem man die Vervielfachungszahl 2, 3, 4 . . . . 9 Mal, und das dadurch erhaltene Vielfache zehnmal nimmt. Nimmt man nun die aus Zehnern bestehende Vervielfachungszahl 2, 3, 4 . . . . 9 Mal, so erhält man Zehner; und nimmt man das Herausgekommene 10 Mal, so erhält man Hunderter.

Anm. Daß das Vervielfachen zweier benannten Zahlen eine Unmöglichkeit ist, ist vielleicht dem Schüler in diesem Augenblicke noch nicht ganz klar. Allein ist er gewöhnt, Nichts auszusprechen, als was sein wahres Eigenthum geworden, was er also wirklich versteht; so wird er die Aufgabe 40×80 nicht so behandeln wollen, als wenn hier zwei benannte Zahlen zu vervielfachen wären. In keinem Falle erlaube man Ausdrücke wie: einermal, zehnermal u. s. w.; denn mit 4 Zehnern kann man nicht vervielfachen; man kann also auch keine Zahl 4 zehnermal nehmen. Ist 40 der Vervielfacher, so kann diese Zahl für sich betrachtet, als 4 Zehner angeschaut werden; und es muß dies sogar geschehen, sobald sie mit Ziffern geschrieben werden soll. Allein soll mit 40 vervielfacht werden; so kann dies nur geschehen, indem man die Vervielfachungszahl viermal, und das dadurch erhaltene Vielfache (Vierfache) zehnmal nimmt.

5) Besteht der eine Faktor aus Hundertern, der andere aus Zehnern; so erhält man im Produkte Tausender.

Z. B. 80 × 700 = 10 × 8 × 7 H. = 10 × 56 H. = 56 T. —

Oder: 700 × 80 = 7 × 100 × 8 Z. = 100 × 56 Z. = 10 × 56 H. = 56 T. —

6) Bestehen beide Faktoren aus Hundertern; so erhält man im Produkte Zehntausender.

Z. B. 600 × 500 = 100 × 6 × 5 H. = 100 × 30 H. = 10 × 10 × 30 H. = 10 × 30 T. = 30 Zehnt. —

Denn wenn der Vervielfacher für sich betrachtet aus Hundertern besteht, so kann er sein: 200, 300, 400 .... 900. Man vervielfacht mit 200, 300, 400 .... 900, wenn man die Vervielfachungszahl 2, 3, 4 .... 9 Mal und das dadurch erhaltene Vielfache 100 Mal nimmt. Nimmt man nun die aus Hundertern bestehende Vervielfachungszahl 2, 3, 4 .... 9 Mal, so erhält man Hunderter; und nimmt man dieses Vielfache 100 Mal = 10 × 10 Mal, so erhält man Zehntausender.

7) Besteht der eine Faktor aus Tausendern, der andere aus Zehnern, so erhält man im Produkte Zehntausender.

Z. B. 70 × 8000 = 10 × 7 × 8 T. = 10 × 56 T. = 56 Zehnt. —

Oder: 8000 × 70 = 1000 × 8 × 7 Z. = 1000 × 56 Z. = 56 Zehnt. —

8) Besteht der eine Faktor aus Tausendern, der andere aus Hundertern; so erhält man im Produkte Hunderttausender.

Z. B. 300 × 6000 = 100 × 3 × 6 T. = 100 × 18 T. = 10 × 18 Zt. = 18 Hunderttausendern.

Oder: 6000 × 300 = 1000 × 6 × 3 H. = 1000 × 18 H. = 18 Hunderttausendern.

9) Wenn beide Faktoren aus Tausendern bestehen; so erhält man im Produkte Millioner.

Z. B. 9000 × 4000 = 1000 × 9 × 4 T. = 1000 × 36 T. = 10 × 10 × 10 × 36 T. = 36 Mill. —

Diese Sätze (welche klar erfaßt werden müssen, damit sie beim schriftlichen Rechnen als Stützpunkte dienen können) werden weiter fortgeführt, sobald Veranlassung dazu sich bietet. Die weitere Ausführung wird hier übergangen werden können, da sie nun keine Schwierigkeiten mehr verursachen kann.

c.

1) Bei den angewandten Aufgaben ist es schlechterdings nothwen-

dig, daß der Schüler jedesmal in den Sinn der Aufgabe gedrungen und klar erkannt habe, was geschehen soll. Der Lehrer hat sich daher bei jeder Aufgabe zu überzeugen, ob die Schüler sie erfaßt haben; denn wie sie eine Aufgabe nicht zu beantworten wissen, so verstehen sie in der Regel die Einkleidung derselben nicht. Ist die Aufgabe gelöst; so hat der Schüler anzugeben, welche Rechnungsart er angewendet, und wie er zu der Einsicht gekommen ist, daß die Aufgabe durch Anwendung dieser Rechnungsart gelöst werde. Es sei z. B. die Aufgabe gegeben: 15 Groschen sind dem Werthe nach = wie viele Kreuzer? — Um diese Aufgabe lösen zu können, muß der Schüler wissen, daß 1 Groschen dem Werthe nach = 3 Kreuzern ist; und er wird dann ungefähr so sprechen: 1 Groschen ist = 3 Kzr.; also sind 15 Groschen = 15 × 3 Kzr. = 45 Kzr. — Es wäre nun immerhin möglich, daß ein Schüler diese Auflösung gegeben, ohne den Sinn der gesprochenen Worte klar erkannt zu haben. Man verlange daher weitere Rechenschaft, welche er ungefähr folgender Maßen geben könnte: Ich soll angeben, wie viele Kreuzer dem Werthe von 15 Groschen gleichkommen. Oder: Die Aufgabe verlangt die Angabe des Werthes einer bestimmten Anzahl Einheiten einer Sorte in Einheiten einer niederern Sorte. Die gesuchte Anzahl Einheiten der niedern Sorte wurde durch das Vervielfachen gefunden. Ich habe nämlich gedacht: wenn 1 Groschen = 3 Kzrn. ist; so sind 15 Groschen = 15 × 3 Kzrn. — Man muß also 3 Kzr. 15 Mal nehmen; mithin ist 3 Kzr. die Vervielfachungszahl und 15 der Vervielfacher. Das Vielfache hat denselben Namen, wie die Vervielfachungszahl.

Ist der Schüler nicht im Stande, die Sache so auszusprechen; so kann der Lehrer etwa folgende Frage stellen: Was wird in der Aufgabe verlangt? Durch welche Rechnungsart hast du das Ergebniß gefunden? Wie hast du gedacht, um einzusehen, daß diese Aufgabe durch das Vervielfachen gelöst wird? Welches war die Vervielfachungszahl und welches der Vervielfacher? Welcher dieser 2 Vielfacher war benannt, welcher unbenannt? Muß der Vervielfacher immer unbenannt sein? Warum? War das Vielfache benannt oder unbenannt? Erhält das Vielfache immer denselben Namen, den die Vervielfachungszahl hat? —

Der Schüler ist aufmerksam zu machen, daß 15 × 3 Kzr. dem Werthe nach = 3 × 15 Kzr. Sobald daher nur auf den Werth gesehen wird, und die ursprüngliche Anschauung nicht festgehalten

werden soll; so wird stets die größte Zahl zur Vervielfachungszahl genommen. Die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten der niedern Sorte eine Einheit der höhern Sorte in sich faßt, heißt die Verwandlungszahl (§. 14. I.).

Anm. Wenn viele Aufgaben, wie die obige. berechnet worden sind, so leite man die Schüler zur Auffindung folgender Regel an:

Wenn Einheiten irgend einer Sorte in Einheiten einer niederern Sorte verwandelt werden sollen; so vervielfache die Zahl, welche die Einheiten der höhern Sorte angibt, mit der Verwandlungszahl und gebe dem Vielfachen die Benennung der niederern Sorte.

Im Anfange und in der Volksschule überhaupt lasse man diese und ähnliche Regeln nicht in ihrer Allgemeinheit, sondern immer nur mit Bezug auf den gerade vorliegenden Fall aussprechen. Z. B. Gulden werden in Kreuzer verwandelt, wenn man die Zahl, welche die Gulden bezeichnet, mit 60 vervielfacht.

2) Die Antworten zu den angewandten Aufgaben sind:

1) 216.
2) 10000.
3) 140 Groschen.
4) 45, 54, 72, 81, 90, 108, 144, 162, 240 Kreuzer.
5) 44, 60, 68, 80, 100, 116, 136, 160, 228, 356 Kreuzer.
6) 72, 78, 114, 120, 126, 168, 180, 222, 336, 408 Kzr.
7) 60, 84, 108, 144, 180, 240, 384, 480 Kzr.
8) 140, 180, 200, 240, 260, 320, 600 Kzr.
9) 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240, 480, 720, 960 Kzr.
10) 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 1200, 1800 Kzr.
11) 44, 56, 64, 92, 140, 216 Pfennige.
12) 192, 192, 216, 192, 480, 1200 Pfennige.
13) 24, 30, 45, 60, 72, 114, 207 Kopfstücke.
14) 30, 40, 65, 85, 125 Dreibätzner.
15) 90, 100, 250, 380, 600, 700, 930, 980, 1000 Sechser.
16) 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 300 Batzen.
17) 80, 160, 200, 240, 400, 600 Groschen.
18) 54, 81, 108, 135, 162, 216, 270 Sechser.
19) 128, 192, 256, 320 Loth.
20) 52, 60, 68, 112, 140 Quentchen.
21) 600, 800, 900, 1000, 2000, 1500, 4000 ℔.
22) 144, 168, 192, 216, 240 Stunden.

23) 98, 112, 126, 140, 210, 280 Tage.
24) 360, 240, 540, 600, 1200, 3000 Minuten.
25) 112 Tage.
26) 110, 140, 250 Zoll.
27) 170, 350, 960 Schuh.
28) 160, 240, 400, 490 Linien.
29) 540, 670, 790 Mltr.
30) 730, 900, 1000 Sester.
31) 68 Viertel. 32) 270 Sgr. 33) 192, 216, 480 Bogen. 34) 360 Stück. 35) 162 Bäume. 36) 480 Steine.

d.

1) 85 Kzr. 2) 132 Kzr. 3) 78 fl. 4) 108 fl. 5) 620 Kzr. 6) 240 Ellen. 7) 72 Kzr. 8) 198 Seiten. 9) 128 Scheiben. 10) 2880 Sekunden. 11) 108 Kzr. 12) 900 fl.

II. Schriftlich:

a.

Haben die Schüler alle bisher vorgekommene Aufgaben mündlich berechnet; so werden sie auch im Stande sein, die jedesmaligen Faktoren und das Produkt mit Ziffern niederzuschreiben, was man das schriftliche Vervielfachen nennt. Die Art und Weise der schriftlichen Multiplikation soll im Anfange dem Schüler überlassen bleiben; der Lehrer bemerke nur, daß man gewöhnlich den Vervielfacher unter die Vervielfachungszahl schreibe, so daß Einer unter Einer u. s. w. zu stehen kommen.

Die verschiedenen Auflösungsweisen sind an nachstehenden Beispielen zu ersehen:

1)
```
       874
         6
    ------
      4800 = 6 × 8 H.
       420 = 6 × 7 Z.
        24 = 6 × 4 E.
    ------
      5244
```

Die Vervielfachungszahl wird hier als eine Summe betrachtet, die aus den 3 Posten 8 H. + 7 Z. + 4 E. besteht. Die Vervielfachung

wird durch das Vervielfachen dieser Posten ausgeführt. Denn Vervielfachung aller Posten = Vervielfachung der Summe.

Oder:

```
  874
    6
 ----
   24
  420
 4800
 ----
 5244.
```

Oder:

```
  874
    6
 ----
 5244
```

Nämlich: 6 × 4 E. = 24 E. = 2 Z. + 4 E.; die 4 E. werden in die Einerstelle geschrieben, die 2 Z. zu den Zehnern genommen. 6 × 7 Z. = 42 Z. = 420 = 4 H. + 2 Z.; die 2 Z. werden mit den von den Einern erhaltenen Zehnern vereinigt und in die Zehnerstelle geschrieben, die 4 H. zu den H. gezählt. 6 × 8 H. = 48 H.; dazu noch 4 H., so sind es im Ganzen 52 H. oder 5 T. + 2 H.; die Hunderter werden in die dritte, die Tausender in die vierte Stelle gesetzt.

2)

```
  900
    7
 ----
 6300
```

Nämlich: 7 × 9 H. = 63 H. = 6 T. + 3 H. = 6300.

Oder: 7 × 9 = 63; die Vervielfachungszahl besteht aber nicht aus 9 Einern, sondern aus 9 Hundertern, und da der Vervielfacher aus Einern besteht; so erhalte ich im Vielfachen Hunderter. Es sind also 63 H. = 6 T. + 3 H. — Die Tausender werden in die vierte und die Hunderter in die dritte Stelle gesetzt. Um aber eine dritte Stelle zu erhalten, muß ich auch eine erste und zweite Stelle bezeichnen, und da weder Einer noch Zehner angegeben sind; so setze ich in die erste und zweite Stelle Nullen.

3)

```
   900
    50
 -----
 45000.
```

Gesprochen wird dabei: 5 × 9 = 45; die beiden Vielfacher bestehen aber nicht aus Einern, sondern die Vervielfachungszahl besteht aus Hundertern, und der Vervielfacher aus Zehnern; ich erhalte da-

her im Vielfachen Tausender; die Tausender werden in die vierte Stelle geschrieben, ich muß somit die drei ersten Stellen mit Nullen ausfüllen. 45 T. = 45000.

Später wird der Schüler leicht die Regel finden: Wenn in beiden Faktoren Nullen vorkommen, so vervielfache die geltenden Ziffern mit einander, und hänge diesem Produkte so viele Nullen an, als die beiden Faktoren zusammen haben.

Die Regel, daß eine Zahl mit 10, 100, 1000 u. s. w. vervielfacht ist, sobald man ihr rechts eine, zwei, drei u. s. w. Nullen beisetzt, wird der Schüler leicht selbst finden; denn er weiß, daß jede Zahl durch Vervielfachung mit 10 eine Zahl der nächst höhern Ordnung wird, daher auch die Ziffer, welche diese Zahl bezeichnet, in die nächst höhere Stelle gerückt werden muß, welches geschieht, wenn man rechts eine Null beisetzt. Daraus ergibt sich nun auch die Anhängung von zwei Nullen bei der Vervielfachung mit 100 u. s. w. Um die Anhängung von Nullen nicht zu vergessen, werden die im Vervielfachen vorkommenden Nullen gewöhnlich gleich neben hinausgeschrieben. Z. B.

945
700
―――――
661500

4)

4|6|0|3
7|2|9
―――――
4|1|4|2|7
9|2|0|6|0
3|2|2|2|1|0|0
―――――
3|3|5|5|5|8|7.

Nämlich: a. 9 × 3 E. = 27 E. = 2 Z. + 7 E.; 9 × 6 H. = 54 H. = 5 T. + 4 H.; 9 × 4 T. = 36 T., hiezu noch 5 T. geben 41 T. = 4 Zehnt. + 1 T.

Das Produkt aus 9 × 4603 ist also = 4 Zt. + 1 T. + 4 H. + 2 Z. + 7 E. = 41427.

b. 2 × 3 = 6. Besteht die Vervielfachungszahl aus Einern und der Vervielfacher aus Zehnern, so erhält man im Vielfachen Zehner; 6 wird also in die zweite Stelle geschrieben und in die erste Stelle eine Null gesetzt. 2 × 6 = 12. Besteht die Vervielfachungszahl aus Hundertern und der Vervielfacher aus Zehnern: so erhält man im Vielfachen Tausender; es sind also 12 Tausender = 1 Zehnt. + 2 T.;

2 wird daher in die vierte Stelle geschrieben und die dritte mit einer Null ausgefüllt. 2 × 4 = 8. Besteht die Vervielfachungszahl aus Tausendern und der Vervielfacher aus Zehnern; so erhält man im Vielfachen Zehntausender. Ich habe also 8 Zehntausender erhalten, dazu noch 1 Zehnt. geben 9 Zehnt.; diese müssen in die fünfte Stelle gesetzt werden, denn nur in der fünften Stelle bezeichnet eine Ziffer Zehntausender.

Das Vielfache aus 20 × 4603 ist also = 92060.

c. 7×3=21. Besteht die Vervielfachungszahl aus Einern und der Vervielfacher aus Hundertern, so erhält man Hunderter; es sind dies also 21 H. = 2 T. + 1 H.; 1 wird daher in die dritte, 2 in die vierte Stelle gesetzt, und die erste und zweite Stelle mit Nullen ausfüllt. 7 × 6 = 42. Bestehen beide Vielfacher aus Hundertern, so erhält man Zehntausender. Es sind also 42 Zehntaus. = 4 Hunderttaus. + 2 Zehntaus.; 2 wird in die fünfte Stelle geschrieben und 4 Hunderttaus. im Sinne behalten. 7 × 4 = 28. Besteht die Vervielfachungszahl aus Tausendern und der Vervielfacher aus Hundertern, so erhält man Hunderttausender. Es sind also 28 Hunderttaus., dazu noch 4 Ht. geben 32 Ht. = 3 Mill. + 2 Ht.; 2 wird daher in die sechste und 3 in die siebente Stelle gesetzt. Das Vielfache aus 700 × 4603 ist mithin = 3222100.

Zählt man die einzelnen Produkte zusammen, so erhält man 3355587 als Gesammtprodukt.

Weil die Nullen bei der Addition der einzelnen Reihen keine Aenderung hervorbringen, so werden sie, sobald einige Fertigkeit erlangt ist, weggelassen.

Z. B.
```
     4603
      729
    -----
    41427
    9206
   32221
  -------
  3355587.
```

Wenn die Schüler die unter I. b. aufgestellten Sätze verstehen und eingesehen haben, daß jede zusammengesetzte (d. i. aus Einheiten mehrerer Ordnungen bestehende) Zahl vervielfacht wird, indem man sie als eine Summe betrachtet und alle einzelnen Posten vervielfacht; so werden sie leicht folgende praktische Regel finden:

IV. Beim Vervielfachen muß jeder Theil der Vervielfachungszahl mit jedem Theile des Vervielfachers vervielfacht werden. Kommen in der Vervielfachungszahl Einheiten verschiedener Ordnungen vor; so vervielfache die Einheiten einer jeden Ordnung von der niedersten angefangen, ziehe jedes Mal die in dem erhaltenen Vielfacher enthaltenen Einheiten der nächst höhern Ordnung heraus, und zähle sie zu den Einheiten dieser Ordnung. Beim schriftlichen Vervielfachen setze die erste Ziffer jedes Vielfachen unter die Ziffer des Vervielfachers. Kommen in den niedersten Stellen des Vervielfachers Nullen vor, so schreibe sie neben hinaus und setze sie beim Vervielfachen gleich herunter. Zuletzt zähle die einzelnen Vielfache zusammen.

Anm. I. Sobald die Regel aufgestellt ist, muß sie an vielen Beispielen tüchtig eingeübt werden. Mit dem Wissen soll überall das Können verbunden sein.

Anm. II. Einfach benannte Zahlen werden vervielfacht wie unbenannte Zahlen, nur gebe man dem Vielfachen die Benennung der Vervielfachungszahl.

Anm. III. Es gibt noch einige Abkürzungen bei der Multiplikation, der sich derjenige, welcher die Sache versteht, bedienen kann. Wenn man die Gewißheit hat, daß die Schüler fertig und mit voller Sicherheit zu multiplizieren verstehen, so kann man sie darauf aufmerksam machen, etwa folgender Maßen:

Lehrer: Um wie viel ist das Vielfache von 100×20 größer, als das Vielfache von 99×20? Welche Veränderung muß man mit dem Hundertfachen von 20 vornehmen, um eine Zahl zu erhalten, welche gleich ist dem 99fachen von 20? Ist $99 \times 20 = 100 \times 20 - 1 \times 20$? Erhält man das Vielfache aus 99×20, wenn man 20 mit 100 vervielfacht und von diesem Vielfachen 20 abzieht? Wird eine Zahl mit 99 vervielfacht, wenn man dieser Zahl 2 Nullen anhängt, und von der dadurch entstandenen Zahl die ursprüngliche Zahl wieder abzieht? Wie kann man verfahren, wenn eine Zahl mit 9, mit 999, mit 9999 vervielfacht werden soll? — Hierher gehört auch die Abkürzung, welche häufig bei der Vervielfachung mit 11 angewendet wird. Soll z. B. 45 mit 11 vervielfacht werden, so erhält man eine dem Produkte aus 11×45 entsprechende Zahl, wenn man die erste und letzte Ziffer der Vervielfachungszahl zur ersten und letzten Ziffer des Produkts macht, als zweite Ziffer des Produkts aber die Summe der ersten und zweiten Ziffer der Vervielfachungszahl anschreibt. $11 \times 45 = 495$. Eben so ist $11 \times 2345 = 25795$. Bei der wirklichen Ausführung der Multiplikation

wird man leicht die Gründe einsehen, auf denen dieses Verfahren beruht.

Die Antworten zu den schriftlichen Multiplikationsaufgaben (von Nr. 6 angefangen) sind:

6) 1456, 10816, 26026, 470141, 383316, 85875, 496422, 838151430, 98784218, 27140160000, 390635658, 402311271705576.

b.

1) 77446655. 2) 1945416. 3) 5969925. 4) 390625. 5) 805920. 6) 14616. 7) 12480. 8) 270 Birnen. 9) a. 639480. b. 420480. 10) 13800 fl. 11) 16700 ℔. 12) 1036800 Loth. 13) 8793600 Quentchen. 14) 1007100 Kreuzer. 15) 9286560 Pfennige. 16) 313900 Stück. 17) 1017120000. 18) 14976. 19) 8424. 20) 192528 Meilen.

§. 13.

Das Entvielfachen (Division) mit größeren Zahlen.

I. Mündlich.

a.

1) Das Entvielfachen ohne Ziffern mit größern Zahlen wird in vielen Schulen gar nicht, oder doch nicht hinlänglich geübt, und damit ein Fehler begangen, der nicht zu den unbedeutendsten gehört, unter denen, die bei Ertheilung des Rechenunterrichts vorkommen; denn in der Folge sind in vielen Fällen Einsicht und Fertigkeit für den Schüler Unmöglichkeiten, wenn er in der Bestimmung des gegenseitigen Enthaltenseins zweier Zahlen nicht geübt worden ist.

Die Uebungen, welche beim mündlichen Entvielfachen vorkommen, können wir unter folgende Fälle bringen:

Größere Zahlen werden entvielfacht (dividiert): 1) durch die Grundzahlen; 2) durch reine Zehner; 3) durch reine Hunderter; 4) durch Zehner und Einer; 5) durch Hunderter und Zehner; 6) durch Hunderter, Zehner und Einer.

Der Schüler hat jedesmal anzugeben, welcher dieser Fälle in der Aufgabe vorkommt.

2) Entvielfachen oder Dividieren heißt aus dem Produkte und einem Faktor den andern Faktor bestimmen. Das Produkt heißt

in diesem Falle die Entvielfachungszahl (der Dividendus), der gegebene Faktor der Entvielfacher (der Divisor). Die Zahl, welche durch das Entvielfachen gefunden wird, heißt der Theil oder der Anzeiger (der Quotient). Siehe §. 7 und §. 14. IV. Rücksichtlich des Lehrverfahrens gelten auch hier die §. 10, 2. gegebenen allgemeinen Bestimmungen. Bei Ausführung einer Entvielfachung wird entweder getheilt oder gemessen. Bei unbekannten Zahlen, und wenn in der Aufgabe die bei der Berechnung anzuwendende Form nicht vorgeschrieben ist, bleibt es dem Schüler überlassen, welche der beiden Formen er anwenden will.

Beispiele:

1) 810 soll durch 9 entvielfacht werden!

Auflös. 9 ist in 81 neunmal und in einer 10 Mal so großen Zahl 10 Mal so oft, d. i. 90 Mal, enthalten.

Es sollte eine Zahl, die aus Hundertern und Zehnern besteht, durch eine Zahl, die aus Einern besteht, entvielfacht werden.

Ich habe zuerst untersucht, wie oft 9 in einer zehnmal so kleinen Zahl d. i. in 81 enthalten ist, und dann geschlossen: Ist 9 in 81 neunmal enthalten; so ist 9 in einer zehnmal so großen Zahl d. i. in 810 zehnmal so oft, also 90 Mal enthalten.

Oder: Der 9te Theil von 81 ist 9, und der 9te Theil einer zehnmal so großen Zahl ist auch zehnmal so groß d. i. $10 \times 9 = 90$.

Ich habe jetzt zuerst 81, also eine zehnmal so kleine Zahl als 810, durch 9 getheilt und dann gedacht: Wenn eine 10 Mal so große Zahl, als 81, durch 9 getheilt wird; so muß auch der Theil 10 Mal so groß werden, als 9, d. i. $10 \times 9 = 90$.

Anm. Man lasse viele ähnliche Aufgaben berechnen und bringe dabei den Satz zur Anschauung: Wenn bei gleichbleibendem Theiler die Theilungszahl mit 10 vervielfacht wird; so wird auch der Theil zehnmal so groß, als er früher war.

2) Theile 369 durch 3!

Auflös. $369 = 300 + 60 + 9$. Der dritte Theil von 300 ist 100, der dritte Theil von 60 ist 20, und der dritte Theil von 9 ist 3; also ist der dritte Theil von $369 = 100 + 20 + 3 = 123$.

Es sollte 369 in drei gleiche Theile getheilt und die Größe eines Theiles bestimmt werden. — Ich habe zuerst 369 in $300 + 60 + 9$ zerlegt, sodann den dritten Theil von jeder dieser 3 Zahlen genommen und die erhaltenen Zahlen zusammengezählt.

Anm. Nachdem viele ähnliche Aufgaben berechnet worden sind und die Schü=

ler eingesehen haben, daß man eine zusammengesetzte Zahl häufig als eine Summe betrachten und in mehrere Posten zerlegen muß, um sie theilen zu können, bringe man den Lehrsatz zur Anschauung: Theilung aller Posten ist Theilung der Summe.

3) Wie oft ist 9 in 1269 enthalten?

Auflös. 1269 = 900 + 369. 9 ist in 900 hundert Mal enthalten. Nun habe ich noch zu untersuchen, wie oft 9 in 369 enthalten ist. 369 = 360 + 9. 9 ist in 36 viermal, also in 360 vierzig Mal, und 9 ist in 9 einmal enthalten; mithin ist 9 in 1269, 100 + 40 + 1 = 141 Mal enthalten.

Es war zu untersuchen, wie oft 9 in 1269 enthalten ist. — Ich habe zuerst 1269 so in zwei Zahlen zerlegt, daß 9 in der ersten Zahl ohne Rest enthalten war; sodann habe ich die zweite Zahl 369 wieder in 2 Zahlen zerlegt, welche ich beide als Vielfache von 9 erkannte. Endlich habe ich die Zahlen, welche mir anzeigten, wie oft 9 in 900, in 360 und in 9 enthalten ist, zusammengezählt und so gefunden, wie oft 9 in 1269 enthalten ist.

4) Der zehnte Theil von 786 = ?

Auflös. 786 = 78 Z. + 6 E. Der zehnte Theil von 78 Z. = 78 Einer; 6 Einer lassen sich nicht so in 10 gleiche Theile zerlegen, daß auf einen Theil ein Ganzes kömmt. Also ist der zehnte Theil von 786 = 78 und 6 bleiben übrig.

Da sich 6 Einer nicht durch 10 ohne Rest theilen lassen, so habe ich die 78 Zehner durch 10 getheilt, indem ich eben so viele Einheiten der nächst niederen Ordnung genommen habe.

5) Entvielfache 360 durch 30!

Auflös. a. 360=300+60. 30 ist in 300 zehnmal und in 60 zweimal enthalten; also ist 30 in 360=10+2=12 Mal enthalten.

b. 360 = 36 Z.; 30 = 3 Z.; 3 Z. sind in 36 Z. 12 Mal enthalten.

c. Der zehnte Theil von 360 = 36; der dritte Theil von 36 = 12.

Bei der letzten Auflösung habe ich zuerst durch 10 und das Ergebniß alsdann durch 3 getheilt.

Anm. Der Schüler weiß, daß man mit 30 vervielfacht, wenn man die Vervielfachungszahl 3 Mal und dieses Dreifache 10 Mal nimmt (oder umgekehrt); er wird daher auch leicht einsehen, daß man durch 30 theilt, wenn man zuerst durch 10 und das Ergebniß durch 3, oder zuerst durch 3 und das Erbgebniß durch 10 theilt. Eben so wird eine Zahl durch 6 getheilt, wenn man zuerst durch 2 und das Ergebniß aldann durch 3 theilt.

Haben die Schüler an vielen Beispielen angeschaut, daß man denselben Werth erhält, wenn man durch den ganzen Theiler oder wenn man durch die einzelnen Vielfacher des Theilers theilt; so werde der Satz aufgestellt: Theilung durch die einzelnen Vielfacher des Theilers = Theilung durch den ganzen Theiler. Die Schüler sind fleißig anzuhalten, die Richtigkeiten solcher Sätze an Beispielen in kleinen ganzen Zahlen anschaulich zu machen.

6) Wie oft ist 100 in 10000 enthalten?

Auflös. a. 100 = 1 H., 10000 = 100 H. 1 H. ist in 100 H. 100 Mal enthalten; mithin ist auch 100 in 10000 = Mal enthalten.

b. Der hundertste Theil von 100 H. = 1 H. = 100.

7) 17 ist in 680 wie oft enthalten?

Auflös. 17 ist in 17 = 1 Mal, in 34 = 2 Mal, in 51 = 3 Mal, in 68 = 4 Mal, und in 680 = 40 Mal enthalten.

Um zu finden, wie vielmal 17 in 680 enthalten ist, habe ich zuerst untersucht, wie oft 17 in einer 10 Mal so kleinen Zahl d. i. in 68 enthalten ist, und dann auf eine 10 Mal so große Zahl, nämlich 680 geschlossen.

8) Wie vielmal ist 17 in 700 enthalten?

Auflös. a. 17 ist in 68 vier Mal, und in 680 vierzig Mal enthalten; 700 — 680 = 20; 17 ist in 20 einmal enthalten und 3 bleiben übrig; also ist 17 in 700 = 41 Mal enthalten mit dem Reste 3.

Ich habe hier zuerst eine zehnmal so kleine Zahl als 700, nämlich 70 angeschaut, sodann die 70 zunächst liegende Zahl, in der 17 ohne Rest enthalten ist, durch 17 gemessen, von dieser Zahl auf eine zehnmal so große geschlossen, letztere von der ganzen Zahl abgezogen und den Rest wieder durch 17 gemessen.

b. 17 ist in 100 = 5 Mal enthalten mit dem Reste 15; also ist 17 in 700 = 7 × 5 = 35 Mal enthalten mit dem Reste 7 × 15 = 105. 17 ist also in 105 = 6 Mal enthalten mit dem Reste 3; mithin ist 17 in 700 = 41 Mal enthalten und 3 bleiben übrig.

Die erste Auflösung verdient den Vorzug, weil sie zur Regel hinleitet.

9) Wie oft ist 124 in 1300 enthalten?

Auflös. 124 ist in 124 = 1 Mal, und in 1240 = 10 Mal enthalten; von 1240 bis 1300 sind es noch 60; also ist 124 in 1300 = 10 Mal enthalten, und 60 bleiben übrig.

Anm. Später werden die Schüler auf manche Abkürzungen kommen, die ihnen

dann auch alle zu gestatten sind, sobald sie den Grund ihres Verfahrens anzugeben wissen.

Z. B. 115 ist in 1035 so oft enthalten, als der fünfte Theil von 115′ d.i. 23 in dem fünften Theil von 1035, d.i. in 207. 23 ist in 207 neunmal enthalten; also ist auch 115 in 1035 neunmal enthalten.

b.

Das Verfahren bei den angewandten Aufgaben mag aus nachstehenden Beispielen ersehen werden:

1) Aufgabe: 240 Kzr. sind dem Werthe nach = wie viele Groschen?

Auflös. a. So oft man 3 Kzr. hat, so oft hat man dem Werthe nach 1 Groschen; ich muß daher untersuchen, wie oft 3 Kzr. in 240 Kzrn. enthalten sind. 3 Kzr. sind in 24 Kzr. 8 Mal, und in 240 Kzrn. 80 Mal enthalten. Da nun 3 Kzr. dem Werthe nach = 1 Groschen, und 240 Kzr., 3 Kzr. 80 Mal in sich fassen; so sind 240 Kzr. dem Werthe nach = 80 Groschen.

Die Aufgabe verlangt, daß der Werth einer bestimmten Menge von Kreuzern in einer höhern Münzsorte, nämlich in Groschen angegeben werden solle. — Ich habe untersucht, wie oft 3 Kzr. in 240 Kzr. enthalten sind, und dadurch die unbenannte Zahl 80 gefunden; hierauf habe ich durch den Schluß: „3 Kzr. sind dem Werthe nach 1 Groschen, also sind 240 Kzr. = 80 $\times$ 3 Kzr. dem Werthe nach = 80 Groschen“ gefunden, daß 240 Kzr. = 80 Groschen sind.

b. Da 3 Kzr. = 1 Groschen, so ist 1 Kzr. = dem dritten Theil von 1 Groschen = $\frac{1}{3}$ Groschen, und 240 Kzr. sind = $\frac{240}{3}$ Groschen = 80 Groschen.

Ich habe bei dieser Auflösung aus dem mir bekannten Verhältnisse der Einheiten der niedern Sorte zu den Einheiten der höhern Sorte, den Werth einer Einheit der niedern Sorte in Theilen der höhern Sorte gefolgert, und sofort auf den Werth der gegebenen Anzahl Einheiten der niedern Sorte in Theilen der höhern Sorte geschlossen.

Anm. I. Eine benannte Zahl kann nur durch eine gleichnamige gemessen werden. Es geht dieses schon aus dem Begriffe von Messen (§. 7 u. §. 14 IV.) hervor. Die Zahl, welche durch das Messen gefunden wird, ist stets eine unbenannte Zahl; sie zeigt nur an, wie oft eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist.

Anm. II. Wenn viele Aufgaben, wie die obige, berechnet worden sind; so leite man die Schüler zur Auffindung folgender Regeln an:

1) Wenn eine einfach benannte Zahl durch eine gleichnamige gemessen werden soll; so lasse die Benennung bei beiden Zahlen weg und verfahre wie bei unbenannten Zahlen.

2) Wenn eine einfach benannte Zahl getheilt werden soll; so verfahre wie bei unbenannten Zahlen und füge alsdann dem Theil die Benennung bei.

3) Wenn Einheiten irgend einer Sorte in Einheiten einer höhern Sorte verwandelt werden sollen; so theile die Zahl, welche die Einheiten der niedern Sorte angibt, durch die Verwandlungszahl und gebe dem Theil den Namen der höhern Sorte.

2) Aufgabe: Wenn 12 Personen 720 fl. zu theilen haben; so erhält 1 Person wie viele fl.?

Auflös. Wenn 12 Personen 720 fl. theilen; so erhält 1 Person den zwölften Theil von 720 fl. — Der zwölfte Theil von 72 fl. ist 6 fl., und der zwölfte Theil von 720 fl. ist 60 fl.; also erhält eine Person 60 fl.

In der Aufgabe ist eine Anzahl Personen gegeben, welche eine bestimmte Summe Geld zu theilen haben; und es soll berechnet werden, wie viel eine dieser Personen erhält. — Ich habe 720 fl. in 12 gleiche Theile zerlegt und so die Größe des Antheils einer Person erhalten. Daß die Aufgabe durch das Theilen gelöst wird, habe ich gefunden, indem ich gedacht habe: Wenn 12 Personen 720 fl. theilen; so erhält 1 Person den 12ten Theil von 720 fl.

Die Antworten zu den angewandten Aufgaben sind:

1) 15, 20, 24, 30, 34, 80 Groschen.

2) 12, 15, 18, 19, 22, mit dem Reste 2, 25 Batzen.

3) 14, 15, 20, 60 Sechser.

4) 5, 6, 7 Dreibätzner und 6 Kreuzer bleiben übrig, 8 Dreibätzner + 10 Kreuzer.

5) 2 Sechsbätzner + 12 Kreuzer, 3, 4 Sechsbätzner.

6) 3, 2, 4, 6, 7, 9, 10 fl.

7) 2, 3, 4 ℔. 8) 25 Loth. 9) 20, 10, 30, 40, 50 Tage. 10) 100 Wochen 11) 17, 20, 38 Schuh. 12) 4 fl. 13) 2 fl. 14) 60 fl. 15) 12 fl. 16) 300 Blätter. 17) 60 Fenster. 18) 60 ℛ. 19) 30 Bücher. 20) 24 Reihen. 21) 6 Aepfel. 22) 20 Reihen.

II. Schriftlich.

a.

Bei der schriftlichen Darstellung setzt man den Entvielfacher voran, die Entvielfachungszahl in die Mitte und das Ergebniß zuletzt und trennt die Zahlen durch senkrechte Striche; oder man setzt die Entvielfachungszahl voran und hinter dieselbe den Entvielfacher und das Ergebniß, so daß letzteres unter den erstern zu stehen kommt und beide Zahlen durch einen wagerechten Strich von einander getrennt sind; oder Entvielfachungszahl und Entvielfacher werden durch das Zeichen : getrennt.

Die Art und Weise der Ausführung bleibe im Anfange dem Schüler überlassen; denn weiß derselbe z. B., wie oft 2 in 248 enthalten ist, ohne Ziffern zu berechnen, so wird ihm dies auch mit Ziffern möglich sein. Seine Darstellung würde vielleicht diese sein:

248 = 2 H. + 4 Z. + 8 E.
2 H. : 2 H. = 1 H.
4 Z. : 2 Z. = 2 Z.
8 E. : 2 E. = 4 E.

Oder:

2	248	100
	200	20
	48	4
	40	124.
	8	
	8	
	0	

Sollten die Schüler nicht von selbst auf diese zweite Darstellungsweise kommen; so hat sie der Lehrer etwa durch nachfolgende Fragen dazu anzuleiten, wobei der Schüler anzuhalten ist, das, was er ausspricht, jedes Mal in obiger Form niederzuschreiben.

L. Wie heißt die Aufgabe? Sch. Ich soll 248 in 2 gleiche Theile theilen. L. Wie heißt der Theiler? Sch. Der Theiler heißt 2. L. Wie heißt die Theilungszahl? Sch. Die Theilungszahl heißt 248. L. Welche Zahl theilest du zuerst, wenn du 248 durch 2 theilen sollst? Sch. Ich theile zuerst 200 durch 2.*) L. Wie groß ist

*) Der Schüler wird so antworten, weil er es mündlich so gemacht hat;

der zweite (halbe) Theil von 200? Sch. Der halbe Theil von 200 ist 100. L. Welches ist der Rest der Theilungszahl, den du noch durch 2 zu theilen hast? Sch. Der Rest ist 48. L. Wie findest du diesen Rest? Sch. Ich finde diesen Rest, wenn ich 200 von 248 abziehe. L. Der halbe Theil von 40 ist wie groß? u. s. w.

Das Verfahren in den einzelnen Fällen wird man aus folgenden Beispielen ersehen:

1)	3 | 6.584	2000
	6000	100
	5.84	90
	300	4
	28.4	2194
	270	
	14	
	12	
	2	

Bei der Ausführung wird ungefähr so gesprochen: Ich betrachte zuerst eine 1000 Mal so kleine Zahl als 6584, das ist 6. 3 ist in 6 zwei Mal und in einer tausend Mal so großen Zahl, also in 6000 zweitausend Mal enthalten; mithin ist auch der dritte Theil von 6000 = 2000. 6584—6000=584. Ich betrachte eine hundert Mal so kleine Zahl als 584, das ist 5. Die zunächst liegende kleinere Zahl, welche sich durch 3 ohne Rest theilen läßt, ist 3. Der dritte Theil von 3 ist 1 und der dritte Theil von 300 ist 100. 584—300=284. 2 H. lassen sich nicht so in 3 gleiche Theile zerlegen, daß auf einen Theil Hunderter kommen: ich nehme daher eine zehnmal so kleine Zahl als 284, das ist 28. Die zunächst liegende kleinere Zahl, welche durch 3 ohne Rest theilbar, ist 27. Der dritte Theil von 27 ist 9, und der dritte Theil von 270 ist 90. 284—270=14. 14=12+2; der dritte Theil von 12 ist 4, der dritte Theil von 6584 ist also 2000+100+90+4=2194 mit dem Reste 2.

Es sollte der dritte Theil von 6584 gesucht werden. Ich habe zuerst die

---

sollte aber auch eine Antwort anders ausfallen, so wird sich der denkende Lehrer schon zu helfen wissen. Sobald 200 als erster Posten erkannt ist, wird diese Zahl sogleich unter die Theilungszahl geschrieben.

Theilungszahl so in 2 Posten zerlegt, daß sich der erste Posten 6000 durch 3 ohne Rest theilen ließ. Um den ersten Posten zu erhalten, habe ich eine 1000 Mal so kleine Zahl angeschaut und dies durch einen Tupfen hinter 6 bezeichnet; hierauf habe ich 6 durch 3 getheilt. Da aber der erste Posten nicht 6 ist, sondern 6000; so habe ich den früher erkannten Satz angewendet: Wenn bei gleichbleibendem Theiler die Theilungszahl 1000 Mal so groß wird, so wird auch der Theil 1000 Mal so groß. Auf diese Weise habe ich den ersten Theil 2000 erhalten. Um den zweiten Posten 584 zu bekommen, habe ich den ersten Posten von der Theilungszahl abgezogen. Diesen zweiten Posten habe ich nun selbst wieder so in 2 Posten 300 und 284 zerlegt, daß sich der erste Posten durch den Theiler ohne Rest theilen ließ. Um den ersten Posten 300 zu erhalten, habe ich eine hundert Mal so kleine Zahl (5) angeschaut, die zunächst liegende kleinere Zahl genommen, die durch 3 ohne Rest theilbar war (3), und diese mit 100 vervielfacht. Nachdem ich diesen Posten 300 getheilt hatte, habe ich ihn von 584 abgezogen und so den zweiten Posten 284 erhalten. Diesen zweiten Posten habe ich auf ähnliche Weise in 2 Posten so zerlegt, daß der erste Posten durch 3 ohne Rest theilbar war, und habe so fortgefahren, bis ich zuletzt einen zweiten Posten erhielt, der kleiner als der Theiler war. Zuletzt habe ich die einzelnen Theile zusammengezählt und dadurch den ganzen Theil 2194 erhalten.

2)	7 | 25.80	300
	21 00	60
	4 80	8
	4 20	368
	60	
	56	
	4	

Hier will man den 7ten Theil von 2580, d. i. von 2000 + 500 + 80 wissen. 2 Tausender können aber als Tausender nicht in 7 Theile zerlegt werden, d. h. 2 T. können nicht so in 7 gleiche Theile getheilt werden, daß auf einen Theil Tausender kommen. Man schaut daher zuerst nicht eine 1000, sondern eine 100 Mal so kleine Zahl an, und verfährt alsdann wie oben.

3)	4 | 24.006	6000
	24 000	1
	6	6001
	4	
	2	

4)

12 | 25.34	200	
24 00	10	
13.4	1	
12 0	211	
14		
12		
2		

Haben die Schüler auf diese Weise viele Aufgaben gerechnet und jedes Mal ihr Verfahren bei der Auflösung in Worten ausgesprochen, wie dies bei der ersten Aufgabe angegeben ist; so werden sie leicht folgende Regel finden:

V. Wenn sich beim Theilen die Theile nicht ohne weiteres Nachdenken schnell bestimmen lassen; so zerlege die Theilungszahl so in zwei Posten, daß der erste Posten ohne Rest durch den Theiler theilbar ist und theile diesen Posten. Um den zweiten Posten zu erhalten, ziehe den ersten Posten von der Theilungszahl ab, betrachte diesen zweiten Posten als eine Summe, zerlege ihn ebenfalls in zwei Posten, so daß der erste Posten sich durch den Theiler ohne Rest theilen läßt, und fahre auf diese Weise fort, bis man als zweiten Posten eine Zahl erhält, welche kleiner ist, als der Theiler. Zuletzt zähle die einzelnen Theile zusammen, um den ganzen Theil zu erhalten.

Anm. Bei der Bestimmung des ersten Postens kann der Rechner denselben entweder augenblicklich angeben, oder er muß ihn erst aufsuchen. In letzterem Falle betrachte man zuerst eine 10, 100, 1000 u. s. w. Mal so kleine Zahl, suche sodann die zunächst liegende kleinere Zahl, welche sich ohne Rest theilen läßt, und vervielfache diese Zahl wieder mit 10, 100, 1000 u. s. w.

5)

10 | 723	70
700	2
23	72
20	
3	

Läßt man den Schüler die Ziffern des Quotienten mit den Ziffern

der Theilungszahl vergleichen, so wird er finden, daß die Ziffern der Theilungszahl, die niedrigste ausgenommen, auch die Ziffern des Quotienten sind, und daß die niedrigste Ziffer der Theilungszahl den Rest anzeigt. Wird der Schüler veranlaßt, diese Vergleichung an vielen Aufgaben, in denen 10 als Theiler gegeben ist, anzustellen; so wird er leicht die Regel finden.

VI. Eine Zahl wird durch 10 getheilt, wenn man eben so viele Einheiten der nächst niederen Ordnung nimmt. Beim Rechnen mit Ziffern erhält man den zehnten Theil, wenn man von den Ziffern der Theilungszahl die niedrigste abschneidet, und die übrigen als Ziffern des Theiles (Quotienten), die niedrigste aber als Rest anschreibt.

Anm. I. In der Zahlenlehre setzt man häufig hinter die Ziffer, welche in der Einerstelle steht, einen Strich (Beistrich, ein Komma), zum Zeichen, daß diese Ziffer stets Einer bezeichnen soll, wenn auch rechts davon noch mehrere Ziffern geschrieben werden. Man nennt in diesem Falle den Strich (,) den Einerstrich (Decimalstrich). So sind 54 = 54, = 54 Einern; 5,4 = 5 Einern 4 Zehnteln. Man erhält nun auch den zehnten Theil, sobald man den Einerstrich um eine Stelle gegen die linke Hand hin fortrückt.

87 = 87, getheilt durch 10 = 8,7.
870 = 870, „ „ „ = 87, = 87.
8700 = 8700, „ „ „ = 870, = 870.

Anm. II. Der Schüler wird nun auch leicht einsehen, daß, um den Quotienten zu erhalten, wenn die Theiler 100, 1000, 10000 u. s. w. sind, man nur von den Ziffern der Theilungszahl, von der rechten Hand zur linken, so viele Ziffern abzuschneiden braucht, als der Theiler Nullen hat, da eine Zahl durch 10 getheilt wird, so oft man eine Stelle abschneidet.

6) 30 | 6090 | 200
6000 | 3
90 | 203
90
0

Hat der Schüler die Aufgabe auf vorstehende Weise berechnet, und den §. 13 I. a. 5) Anm. aufgestellten Satz nicht angewendet; so gebe man folgende Aufgaben und lasse sie mit der so eben berechneten vergleichen:

609 : 3 = ? 60900 : 300 = ?

Die Schüler werden nun leicht folgende Regel begreifen:

VII. Wenn sich der Theiler in zwei Vielfacher auflösen läßt, von denen der eine 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. ist; so theile zuerst durch 10, 100, 1000 u. s. w. und alsdann durch den andern Vielfacher. Nur dürfen bei der Bestimmung des Restes die abgeschnittenen Ziffern in der Theilungszahl nicht vergessen werden. Z. B.

```
4(00 | 678(59 | 100
       400    |  60
       ---    |   9
       278    | ---
       240    | 169
       ---    |
        38    |
        36    |
       ---    |
         2    |
```

Mithin ist 400 in 67859, 169 Mal enthalten mit dem Reste 259. Es sind nämlich 4 H. in 678 H. eben so oft enthalten, als 4 E. in 678 E., oder als 4 in 678; folglich ist auch der 4te Theil von 678 so groß, als der 400ste Theil von 678 Hundertern. Der vierte Theil von 678 ist 169 und 2 bleiben als Rest, welche aber jetzt nicht mehr als Einer, sondern als Hunderter angesehen werden müssen. Nimmt man die abgeschnittenen Ziffern zu den 2 H., so ist der ganze Rest 259. Der Rest wird gewöhnlich mit kleinern Ziffern, als der Quotient, über einen wagerechten Strich geschrieben, unter welchen der Theiler zu stehen kommt.

Z. B. 67859 : 400 = $169\frac{259}{400}$.

Tritt der Fall ein, daß man die Theilung nicht vornehmen kann, weil die Theilungszahl kleiner ist, als der Theiler, oder will man das Geschäft des Theilens nur anzeigen; so geschieht dies auf die nämliche Weise.

Z. B. 14 getheilt durch 19 = $\frac{14}{19}$.

```
7)   76 | 125.6 | 10
           76 0 |  6
          ----- | --
           49 6 | 16
           45 6 |
          ----- |
            4 0 |
```

Da man 12 Hunderter, als solche, nicht in 76 gleiche Theile zerle-

gen kann; so muß man den Theiler gleich mit den 3 ersten Ziffern der Theilungszahl vergleichen, was durch einen Tupfen hinter 5 angezeigt werden kann. Häufig wird der Schüler, wenn der Theiler mehrstellig ist, in Verlegenheit sein, den Theil schnell anzugeben; man lasse ihn alsdann die Sache so überlegen: 76 ist in 125 beiläufig so oft enthalten, als 70 in 120 oder als 7 in 12. 7 ist in 12 ein Mal enthalten, also ist auch 76 in 125 beiläufig 1 Mal und in einer 10 Mal so großen Zahl, d. i. in 1250, auch 10 Mal so oft, d. i. 10 Mal enthalten; folglich ist auch der 76ste Theil von 1250 = 10. 76 × 10 = 760; 1256 — 760 = 496 u. s. w.

Hat man daher einen mehrstelligen Theiler; so untersucht man zuerst, wie vielmal die erste Ziffer des Theilers in der ersten oder in den beiden ersten Ziffern der Theilungszahl enthalten ist. Jedoch erfährt man auf diesem Wege nur beiläufig den wahren Quotienten; leicht könnte der Schüler verleitet werden, bei der Vergleichung der ersten Ziffer des Theilers 76 mit den beiden ersten Ziffern des Restes 496 in dem vorstehenden Beispiele 7 als Quotienten anzunehmen. Er würde aber in diesem Falle bei Vervielfachung des angenommenen Quotienten mit dem Theiler eine größere Zahl erhalten, als 496, woraus er ersehen könnte, daß der Quotient eine kleinere Zahl sein muß.

8)	902	8765.432	9000
		8118 000	700
		6474.32	10
		6314 00	7
		1603.2	$9717\frac{698}{902}$.
		902 0	
		701 2	
		631 4	
		69 8	

Der Theiler muß hier im Anfange mit den 4 ersten Ziffern der Theilungszahl verglichen werden; denn weder 8 Millioner, noch 87 Hunderttausender, noch 876 Zehntausender können so in 902 gleiche Theile zerlegt werden, daß man im Quotienten Millioner oder Hunderttausender oder Zehntausender erhält; aber 8765 Tausender lassen sich durch 902 theilen. 902 ist in 8765 beiläufig so oft enthal-

ten, als 9 in 87; 9 ist in 87, 9 Mal enthalten; also ist 902 in 8765 auch ungefähr 9 Mal und in einer 1000 Mal so großen Zahl, d. i. in 8765000, 1000 Mal so oft, d. i. 9000 Mal enthalten; mithin ist auch der 902te Theil von 8765000=9000. 902×9000=8118000; 8765432 — 8118000 = 647432 u. s. w.

Aus Obigem ist auch ersichtlich, daß man gleich im Anfang bestimmen kann, wie viele Stellen der Quotient erhalten wird. Weiß man, wie viele Ziffern von der Theilungszahl genommen werden müssen, um den ersten Theil des Quotienten zu erhalten; so bekommt man so viel weitere Stellen im Quotienten, als Ziffern in der Theilungszahl übrig sind.

Anm. Alle Lehrer werden wissen, daß es ein kürzeres Verfahren für das Theilen gibt. Haben die Schüler lange die Aufgaben nach der oben bezeichneten Art gerechnet, so werden sie auf das kürzere Verfahren endlich selbst kommen. In keinem Falle zeige man ihnen die kürzere Darstellung früher, als bis sie sich an die richtige Einsicht in die Sache gleichsam gewöhnt haben. Ueberhaupt merke man, daß sich der Schüler auf jeder Stufe an die Einsicht gewöhnen muß; er kann heute durch die Fragen und Erklärungen des Lehrers dahin gekommen sein, daß er etwas versteht, was ihm nach 8 Tagen, wo er sich dieser Fragen und Erklärungen nicht mehr erinnert, durchaus nicht mehr klar ist. Daher auf jeder Stufe hinlängliche Uebung! Namentlich ist dies aber auch beim Entvielfachen nothwendig, das dem Schüler so geläufig sein muß, daß er es gewissermaßen ganz mechanisch, d. h. ohne alles weitere Nachsinnen, verrichten kann.

Es folgt noch eine Aufgabe auf mehrfache Weise berechnet, um die verschiedenen Verfahren leicht vergleichen zu können. 1632 : 24 = ?

a.

24	163.2	60
	144 0	8
	19 2	68
	19 2	
	0	

b.

24	163.2	68
	144	
	19 2	
	19 2	
	0	

Hier wurde zuerst 163 durch 24 getheilt, unbekümmert um den

Stellenwerth und 6 als erste Ziffer des Quotienten angeschrieben, sodann wurde das Produkt aus $6 \times 24 = 144$ von 163 abgezogen, und die folgende Ziffer der Theilungszahl heruntergesetzt. Hierauf wurde 192 getheilt u. s. w.

c. 24 | 1632 | 68
      19

Hier wurde das aus dem Quotienten und dem Theiler erhaltene Produkt nicht angeschrieben, sondern sogleich abgezogen und nur der Rest bemerkt. Man pflegt dies zu thun, wenn der Theiler einstellig ist.

d. $24 = 4 \times 6 = 4 \times 2 \times 3$

4 | 1632 | 408.	4 | 1632 = 408
	2 | 408 = 204
6 | 408 | 68.	3 | 204 = 68.

Hier wurde der Theiler in seine Faktoren zerlegt. Diese Abkürzung kann nur dann angewendet werden, wenn bei der Theilung mit den ersten Faktoren kein Rest bleibt.

Die Probe der Multiplikations- und Divisions-Aufgaben.

Wenn im Vervielfachen kein Fehler begangen worden ist; so muß das Produkt, durch den einen Faktor getheilt, den andern als Quotienten geben. Bei richtiger Ausführung der Division muß das Produkt, welches man erhält, wenn man den Quotienten mit dem Theiler vervielfacht, so groß sein, als die Theilungszahl; ist bei der Theilung ein Rest geblieben, so muß derselbe dem Produkte zugezählt werden. Die Probe der Multiplikation wird also durch die Division, und die der Division durch die Multiplikation vollführt. Ueberhaupt wird die Probe jeder Rechnungsart immer durch das entgegengesetzte Verfahren gemacht; denn die der Addition geschieht durch die Subtraktion, die der Subtraktion durch die Addition, die der Multiplikation durch die Division, und die der Division durch die Multiplikation.

Beantwortung der schriftlichen Divisions-Aufgaben von No. 11. angefangen.

11) $5\frac{100}{117}$; $28\frac{130}{240}$; $12\frac{516}{780}$; $129\frac{387}{523}$; $60\frac{425}{607}$: $120\frac{441}{724}$; $9717\frac{698}{902}$.

12) $1738\frac{34153}{45236}$; $101\frac{53091}{670805}$; $82833\frac{6154788}{7899901}$; $16659\frac{54008}{140798}$; $8000000\frac{9876504}{123456789}$.

b.

1) 23 Mal. 2) 32 Mal. 3) 210 ℔ 28 Loth. 4) 1029 fl. 5) 125 Kinder. 6) $49\frac{2}{37}$ fl. 7) 750 fl. 8) 5024 fl. 24 Kzr. 9) 8666 fl. 40 Kzr. 10) 155574 Jahre 59 Tage. 11) 271015 Tage 18 Stunden. 12) 126807 fl. 16 Kzr. 13) 211 Jahre 16 Wochen. 14) 11 Tage 13 Stund. 46 Min. 40 Sek. 15) 21 Jahre 335 Tage. 16) 2 Jahre 100 Tage 10 Stunden. 17) $55232876\frac{260}{365}$ Fuß. 18) 16 Tage 11 Stund. 40 Min. $23\frac{8}{104}$ Sek.

Anm. Sollten diese Aufgaben nicht zureichen; so bedenke man nur, daß jede Multiplikationsaufgabe, in der die beiden Faktoren nicht einander gleich sind, Stoff zu zwei Divisionsaufgaben gibt, und daß die Schüler zu jeder Aufgabe ähnliche bilden sollen. — Die Aufgaben im §. 13 II. a. Nr. 12 und in b. von Nr. 9 an sind erst im sechsten oder siebenten Schuljahre zu berechnen.

Ehe der Lehrer zu den Rechnungsarten in ungleich benannten ganzen Zahlen übergeht, ist es nothwendig, die 4 vorhergehenden §§. zu wiederholen und überall zu verweilen und noch einmal sattsam zu üben, wo Mangel an Einsicht oder an Fertigkeit gefunden wird. Will der Lehrer versichert sein, daß sein künftiger Unterricht gute Früchte trage; so ist es nothwendig, daß dem Schüler alle bisher vorgekommenen Operationen ganz geläufig werden, ja daß er dieselben mit mechanischer Sicherheit vollziehen kann. Und sollte es auch ausnahmsweise unter obigen Bedingungen der Fall sein, daß ein Schüler nur bis hierher geführt werden könnte; so wäre doch sein Verstand durch die verschiedenen Uebungen schon manchfaltig gebildet und er dadurch eher befähigt, eine ihm im Leben vorkommende Aufgabe zu berechnen, als wenn er ohne Einsicht bis zu den Mischungs- und Zinseszinsrechnungen gekommen wäre.

c.

Wurde der Rechenunterricht bis hierher gut ertheilt; so müssen die Schüler die nachstehenden Sätze, wenn ihnen dieselben in Frageform gegeben werden, zu beantworten wissen. Die Richtigkeit eines jeden Satzes muß von dem Schüler an einem Beispiele in kleinen ganzen Zahlen anschaulich gemacht werden.

1) Wenn der Theiler und die Theilungszahl gegeben sind; so findet man den Theil, wenn man die Theilungszahl in so viele gleiche Theile zerlegt, als der Theiler anzeigt.

2) Wenn der Theil und die Theilungszahl gegeben sind; so findet man den Theiler, wenn man untersucht, wie oft der Theil in der Theilungszahl enthalten ist.

3) Das Vielfache, welches man erhält, wenn man den Theil mit dem Theiler vervielfacht, ist gleich der Theilungszahl.

4) Wenn die Vervielfachungszahl und der Vervielfacher gegeben sind; so erhält man das Vielfache, wenn man die Vervielfachungszahl mit dem Vervielfacher vervielfacht.

5) Sind die Vervielfachungszahl und das Vielfache gegeben; so erhält man den Vervielfacher, wenn man untersucht, wie oft die Vervielfachungszahl in dem Vielfachen enthalten ist. In diesem Falle wird die Vervielfachungszahl zum Entvielfacher, das Produkt zur Entvielfachungszahl, und der Vervielfacher erscheint als Quotient.

6) Sind der Vervielfacher und das Produkt bekannt; so erhält man die Vervielfachungszahl, wenn man das Produkt durch den Vervielfacher theilt.

7) Ist der Theil gleich dem Theiler, so ist die Theilungszahl das Produkt einer mit sich selbst vervielfachten Zahl.

8) Ist das Ergebniß gleich der Entvielfachungszahl, so ist der Entvielfacher = 1; ist der Entvielfacher so groß, als die Entvielfachungszahl, so ist das Ergebniß = 1.

9) Wenn bei einer Theilung ein Rest bleibt; so erhält man die Theilungszahl, wenn man den Theil mit dem Theiler vervielfacht und zu diesem Produkte den Rest zählt.

10) Wenn bei unveränderter Vervielfachungszahl der Vervielfacher 2, 3 .... Mal so groß wird, als er vorher war, so wird das Vielfache auch 2, 3 .... Mal so groß. Wenn bei unveränderter Theilungszahl der Theiler 2, 3 .... Mal so groß wird, als er vorher war, so wird der Theil 2, 3 .... Mal so klein.

11) Wenn bei unveränderter Vervielfachungszahl der Vervielfacher 2, 3 .... Mal so klein wird, so wird auch das Vielfache 2, 3 .... Mal so klein. Wenn bei unveränderter Theilungszahl der Theiler 2, 3 .... Mal so klein wird, als er vorher war; so wird der Theil 2, 3 .... Mal so groß.

12) Wenn bei unverändertem Vervielfacher die Vervielfachungszahl 2, 3 .... Mal so groß wird, so wird auch das Vielfache 2, 3 .... Mal so groß. Wenn bei unverändertem Theiler die Theilungszahl 2, 3 .... Mal so groß wird, als sie vorher war; so wird auch der Theil 2, 3 .... Mal so groß.

13) Wenn bei unverändertem Vervielfacher die Vervielfachungs-

zahl 2, 3 . . . . Mal so klein wird, so wird auch das Vielfache 2, 3 . . . . Mal so klein. Wenn bei unverändertem Theiler die Theilungszahl 2, 3 . . . . Mal so klein wird, als sie früher war; so wird auch der Theil 2, 3 . . . . Mal so klein.

14) Wenn man den Theiler und die Theilungszahl mit einer und derselben Zahl vervielfacht; so erhält man denselben Quotienten wie vor der Vervielfachung.

15) Werden Theiler und Theilungszahl durch eine Zahl getheilt; so geben diese Zahlen denselben Quotienten, wie vor der Theilung.

16) Man macht eine Zahl zweimal so groß, wenn man sie mit 2 vervielfacht. Eine Zahl wird zweimal so klein, wenn man sie durch 2 theilt.

17) Man verwandelt Gulden in Kreuzer, wenn man 60 Kzr. so vielmal nimmt, als die Zahl anzeigt, welche die in Kzr. zu verwandelnden Gulden angibt. So sind 79 fl. = 79 $\times$ 60 Kzr. Man würde aber auch dasselbe Ergebniß erhalten, wenn man 79 Kzr. 60 Mal nähme.

Will man Pfund in Loth verwandeln; so vervielfacht man 32 Loth mit der Zahl, welche die Anzahl der Pfunde anzeigt. So sind 8 ℔ = 8 $\times$ 32 Loth. Denn 1 ℔ = 32 Loth; also 8 ℔ = 8 $\times$ 32 Loth.

18) Sollen Jahre in Stunden verwandelt werden, so verwandelt man die Jahre zuerst in Tage und alsdann die Tage in Stunden.

Ueberhaupt, wenn eine höhere Sorte nicht in die zunächst niedere, sondern in eine entfernter niedere verwandelt werden soll; so verwandelt man die gegebene Sorte zuerst in die nächst niedere und dann die erhaltene Anzahl in die folgende niedere, u. s. w. bis zur verlangten niedern Sorte.

19) Kreuzer werden in Gulden verwandelt durch Theilung mit 60, Tage in Jahre durch Theilung mit 365 u. s. w. So sind z. B. 240 Kzr. = $\frac{240}{60}$ fl.; denn 60 Kzr. sind dem Werthe nach = 1 fl., also ist 1 Kzr. = dem sechzigsten Theile von 1 fl. = $\frac{1}{60}$ fl., und 240 Kzr. = 240 $\times$ $\frac{1}{60}$ fl. = $\frac{240}{60}$ fl. Man kann aber auch 240 Kzr. in Gulden verwandeln, wenn man untersucht, wie oft 60 Kzr. in 240 Kzr. enthalten sind, und die hiedurch gefundene Zahl als Gulden betrachtet.

20) Sollen Minuten in Tage verwandelt werden, so verwandelt

man zuerst die Minuten in Stunden durch Theilung mit 60, und alsdann die Stunden in Tage durch Theilung mit 24.

Ueberhaupt, wenn eine niedere Sorte in eine entfernter höhere Sorte verwandelt werden soll; so verwandelt man sie zuerst in die zunächst höhere, die dadurch erhaltene Sorte wieder in die nächst höhere u. s. w.

Anm. Die Sätze von Nr. 10 — 15 excl. können von fähigeren Schülern folgender Maßen ausgesprochen werden:
- a. Multiplikation eines Faktors ist Multiplikation des Produkts.
- b. Theilung eines Faktors = Theilung des Produkts.
- c. Multiplikation des Theilers = Theilung des Quotienten.
- d. Division des Theilers = Multiplikation des Quotienten.
- e. Multiplikation der Theilungszahl = Multiplikation des Quotienten.
- f. Division der Theilungszahl = Division des Quotienten.

§. 14.

Die vier Rechnungsarten mit mehrfach benannten ganzen Zahlen.

I. Das Zusammenzählen.

1) Man theilt die Zahlen ein rücksichtlich der ihnen zu Grunde liegenden nur gedachten (abstrakten) oder sinnlich anschaubaren (konkreten) Einheiten in unbenannte und benannte, rücksichtlich der Anzahl der Einheiten in bestimmte (numerische) und unbestimmte (literale). Benannte oder angewandte Zahlen sind also solche, welche auf bestimmte Gegenstände bezogen sind, reine oder unbenannte Zahlen solche, bei welchen dieses nicht der Fall ist. 3, 4, 5 sind unbenannte Zahlen, weil man sich hier keine bestimmten Gegenstände, sondern nur eine Menge von unbestimmt gelassenen Einheiten vorstellt. 3 fl., 4 Kreuzer, 5 Pfunde sind dagegen benannte Zahlen.

Ist die Anzahl der Einheiten bestimmt angegeben, z. B. „6 Kr.“; so heißt die Zahl eine bestimmte Zahl. Ist die Zahl der Einheiten unbestimmt angegeben, z. B. „einige Kzr., mehrere Bücher, viele Menschen, so werden diese unbestimmten Zahlen in der Zahlenlehre gewöhnlich durch die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet. Es kann ein solches Zeichen jede beliebige Menge bedeuten. So heißt der Ausdruck „a. fl.“ so viel als eine Anzahl fl.,

welche später bestimmt werden soll. Die Ziffern sind bestimmte, die lateinischen Buchstaben allgemeine Zahlenzeichen. Siehe meinen arithmetischen Unterricht §. 17. Von den allgemeinen Zahlzeichen braucht in der Volksschule keine Rede zu sein. Dagegen gewöhne man die Schüler der Gymnasien und höheren Bürgerschulen, die einmal aufgestellten Regeln mit solchen allgemeinen Zeichen ohne Worte wiederzugeben. So läßt sich die Regel XXI. mit allgemeinen Zeichen folgender Maßen niederschreiben: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Bestimmte Zahlen kann man dabei nicht zu Grunde legen, weil es sich dem dadurch erhaltenen Ausdrucke nicht mehr ansehen läßt, daß derselbe in gleicher Weise auch für jede andere Zahl richtig ist. Eine mit allgemeinen Zahlzeichen niedergeschriebene Regel wird eine Formel genannt.

Anm. Will man sich die Zahl 3 vorstellen, so muß man sich 3 bestimmte Einheiten denken; aber es ist ganz unbestimmt gelassen, was für Einheiten dies sein sollen; man kann sich 3 Striche oder 3 Menschen oder 3 Kreuzer vorstellen. Die so aufgefaßte Zahl, welche sich nicht auf eine bestimmte Einheit bezieht, sondern bloß eine Wiederholung anzeigt, aber die Sache, die wiederholt genommen werden soll, noch völlig unbestimmt läßt, nennt man eine reine oder unbenannte (abstrakte) Zahl; ihre völlig unbestimmt gelassene Einheit heißt die unbenannte (abstrakte) Einheit.

Will ich mir aber 3 Kreuzer vorstellen, so muß ich mir eine ganz bestimmt gedachte Einheit, nämlich 1 Kzr. 3 Mal genommen vorstellen.

Sofern man also mit einer Zahl zugleich den Begriff der Dinge verbindet, deren Einheitsmenge sie aussprechen soll, oder jene Dinge ausdrücklich neben ihr nennt, heißt sie eine benannte Zahl im Gegensatze der völlig unbenannten, welche sich auf keinen besondern Gegenstand bezieht.

Betrachtet man die Dinge bloß in Bezug auf ihre Größe; so pflegt man sie in dieser Beziehung selbst Größen zu nennen. Denkt man sich eine Größe als Vielheit einfacher Theile aus diesen Theilen, als ihren Einheiten, zusammengesetzt; so gelangt man zu einer deutlichen Vorstellung des Inhalts der Größe, indem man angibt, wie viele solcher Einheiten das Ganze enthält. In diesem Falle heißt man die Größen benannte Zahlen. — Die reine (unbenannte) Zahl ist also keine Größe; wir nennen nur Das Größe, was entweder schon eine benannte Zahl ist, oder sich doch noch als eine benannte Zahl darstellen läßt.

2) Die benannten Zahlen sind entweder gleichnamig oder ungleichnamig. 3 Gulden und 4 Gulden sind gleich benannte Zahlen; 3 Gulden und 4 Loth hingegen ungleich benannte Zahlen.

Die Zahlen sind entweder auf Dinge gleicher Art, oder auf Dinge

verschiedener Art bezogen. Wir nennen solche Dinge, welche einem gemeinschaftlichen Begriffe untergeordnet sind, Dinge gleicher Art oder gleichartige Dinge; so sind Gulden, Thaler und Kreuzer gleichartig, denn sie sind alle dem Begriff *Münze* untergeordnet. Eben so sind die Gewichte: Zentner, Pfund, Loth, Quentchen, gleichartig; dagegen sind Gulden und Schuh ungleichartig, denn die erste Benennung bezeichnet eine Münze, die zweite ein Maß.

Man kann auch sagen: Solche Gegenstände, an denen man nur Das betrachtet, was sie mit einander gemein haben, nennt man *gleichartige* Gegenstände; und man bezeichnet den Umstand, daß man sie als gleichartig ansieht, dadurch, daß man ihnen einen gemeinschaftlichen Namen gibt.

Wenn Zahlen auf Dinge gleicher Art bezogen sind, so spricht man von *gleichartigen Größen*; sind sie auf Dinge ungleicher Art bezogen, von *ungleichartigen Größen*. Gleichartige Größen sind: 6 fl., 5 Kzr.; oder: 8 Ztnr., 5 ℔, 6 Loth; oder: 6 Jahre, 3 Monate, 5 Tage; oder: 8 Ruthen, 4 Schuh, 6 Zoll u. s. w. Ungleichartige Größen sind: 9 Ztnr., 5 fl., 3 Tage.

Die gleichartigen Größen sind entweder gleichnamig, z. B. 6 fl. und 8 fl., oder ungleichnamig, z. B. 6 fl. und 8 Kzr. Gleichartige Größen pflegt man auch Sorten zu nennen; so sind Gulden in Bezug auf Kreuzer die höhere Sorte, und Kreuzer in Bezug auf Gulden die niedere Sorte. Die Zahl, welche angibt, wie viel Einheiten der niedern Sorte eine Einheit der höhern Sorte in sich faßt, nennen wir Verwandlungszahl *).

3) Benannte Zahlen geben entweder nur Einheiten *einer* Sorte, z. B. 6 fl. und 4 fl., oder sie geben Einheiten *mehrerer* Sorten an, z. B. 4 fl. 8 kr. und 6 fl. 12 kr. In ersterem Falle heißen sie *einfach benannte Zahlen*, in letzterem Falle *mehrfach benannte Zahlen*, oder *mehrsortige Zahlen*, oder *ungleich benannte Zahlen*.

---

*) Man nennt häufig die Verwandlung oder Auflösung höherer Sorten in niedere, *Resolution*, und die Verwandlungszahl in diesem Falle *Resolutionszahl*; bei Münzen auch *Währungszahl*. Die Zurückführung niederer Sorten auf höhere nennt man gewöhnlich *Reduktion*, und die Verwandlungszahl in diesem Falle die *Reduktionszahl*.

Von den einfach benannnten Zahlen war schon in den 4 vorhergehenden §§. die Rede. Das Verfahren dabei bezeichnet folgende Regel:

VII. **Einfach benannte Zahlen werden zusammengezählt, abgezogen, vervielfacht und getheilt, wie unbenannte Zahlen, nur füge man jedes Mal dem Ergebniß die Benennung bei.**

4) Wenn es nicht schon früher geschehen ist (s. §. 12 I. c. und §. 13 I. b.), so müssen nun folgende Regeln aufgestellt werden:

VIII. **Höhere Sorten werden in niedere verwandelt durch Vervielfachung mit der Verwandlungszahl.**

IX. **Sollen niedere Sorten in höhere verwandelt werden, so theile durch die Verwandlungszahl.**

Anm. Wenn die Verwandlungszahl mit v und die Einheiten der höhern Sorte mit h bezeichnet werden, so erhält man die Regel VIII durch folgende Schlüsse:

1 Einheit der höhern Sorte = v Einheiten der niedern Sorte;
h Einheiten „ „ „ = h × v = hv Einheiten der niedern Sorte.

Bezeichnet man die Einheiten der niederen Sorte mit v; so erhält man die Regel IX auf folgende Weise:

v Einheiten der niederen Sorte = 1 Einheit der höheren Sorte;
1 Einheit „ „ „ = $\frac{1}{v}$ Einheiten „ „ „ ;
n Einheiten „ „ „ = $\frac{n}{v}$ „ „ „ „ .

5) Das Verfahren beim Zusammenzählen mehrfach benannter ganzer Zahlen mag aus folgenden Beispielen ersehen werden.

1) 8 fl. 14 Kzr. und 9 fl. 56 Kzr. sind wie viel zusammen?

Mündliche Auflös. 14 Kzr. + 56 Kzr. = 70 Kzr. = 1 fl. + 10 Kzr.; 8 fl. + 9 fl. = 17 fl.; 17 fl. + 1 fl. = 18 fl.; dazu noch 10 Kzr., sind 18 fl. 10 Kzr. Also sind 8 fl. 14 Kzr. und 9 fl. 56 Kzr. = 18 fl. 10 Kzr.

2) Addire 87 Ztnr. 6 ℔ 5 Loth 3 Quentchen, 117 Ztnr. 19 ℔ 14 Loth 2 Quentchen, und 223 Ztnr. 34 ℔ 17 Loth 3 Qtchn.

Schriftliche Auflösung:

Ztnr.	℔	Loth	Qtchn.
87	6	5	3
117	19	14	2
223	34	17	3
427	60	6	—

Die Summe der Quentchen war 8. Da 4 Qtchn. schon ein Loth ausmachen; so sind 8 Qtchn. = 2 Loth, welche zu den Loth gezählt werden. Die Summe der Loth war 38, diese geben 1 ℔ und 6 Loth; die 6 Loth werden unter die Loth geschrieben, 1 ℔ zu den ℔ gezählt. Die Summe der ℔ ist 60, die Summe der Ztnr. = 427.

Da nur Gleichnamiges addiert werden kann, so können auch nur solche Zahlen zusammengezählt werden, welche Einheiten von einer Sorte enthalten; also Quentchen zu Quentchen, Loth zu Loth u. s. w. Das Zusammenzählen mehrfach benannter Zahlen gründet sich daher auf das Zusammenzählen einfach benannter Zahlen. Bei der schriftlichen Auflösung schreibe man die gegebenen Posten so, daß stets die gleichnamigen Sorten genau unter einander zu stehen kommen. Die Summe wird von den Posten durch einen Querstrich getrennt. Die Regel für die Berechnung heißt:

X. Wenn mehrfach benannte Zahlen zusammengezählt werden sollen; so zähle, von den Einheiten der niedersten Sorte angefangen, die Einheiten der gleichnamigen Sorten zusammen. Sind in der Summe der Einheiten einer Sorte Einheiten einer höhern Sorte enthalten, so ziehe man diese heraus und zähle sie zu den Einheiten dieser höhern Ordnung.

6) Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen wird für jetzt angewendet auf Längenmaße, Hohlmaße, Gewichte, Geldsorten und Zeitgrößen.

Die Antworten zu den Aufgaben im Rechenunterrichte I. sind:

1) 18 fl. 10 Kzr. 2) 17 ℔ 10 Loth. 3) 1450 fl. 8 Kzr. 2 Pf. 4) 427 Ztnr. 60 ℔ 6 Loth. 5) 3287 fl. 55 Kzr. 6) 35 fl. 44 Kzr. 3 Pf. 7) 1128 Ztnr. 79 ℔ 19 Loth. 8) 58 Ballen 6 Rieß 8 Buch 15 Bogen. 9) 74 Zbr. 1 Mltr. 9 Sstr. 2 Mßln. 4 Bchr. 10) 66 Fdr. 6 Ohm 7 Stützen 7 Mß. 11) 43 Wochen 3 Tage 11 Stdn. 48 Min. 12) 13 fl. 54 Kzr. 13) 380 Ruthen. 14) 49 Morgen 3 Viertel 43 Ruthen. 15) 52 Mark 15 Loth 1 Qtchn. 16) 2395 fl. 10 Kzr. 17) 79 Jahre 11 Mon. 17 Tage. 18) 890 fl. 25 Kzr. 3 Pf.

II. Das Abziehen.

a.

So wie man nur gleichartige und gleichnamige Dinge zusammenzählen kann; so kann man auch nur gleichartige und gleichnamige

Dinge von einander abziehen. Man schreibt daher die gleichnamigen Größen unter einander und zieht die einzelnen von einander ab, wobei man mit der kleinsten Sorte anfängt. Sind von einer Sorte nicht so viele Einheiten da, als abgezogen werden sollen, so verwandelt man eine Einheit der nächst höhern Sorte in Einheiten der niederern Sorte, zieht davon die Abzugszahl ab, und addiert dann die Einheiten der Vollzahl. Fehlt eine Sorte, so nimmt man von der darauf folgenden eine Einheit, und verwandelt sie in Einheiten der fehlenden Sorte. Daher die Regel:

XI. Wenn mehrfach benannte Zahlen von einander abgezogen werden sollen; so ziehe die Einheiten der gleichnamigen Sorten, bei der niedersten angefangen, von einander ab. Sind bei irgend einer Sorte in der Vollzahl weniger Einheiten als in der Abzugszahl; so nehme eine Einheit einer höhern Sorte, verwandle sie in Einheiten der niederen Sorte, ziehe hievon die Abzugszahl ab und zähle die in der Vollzahl ursprünglich gegebenen Einheiten dieser Sorte dazu.

Z. B. 2000 Ztnr. 20 ℔ 10 Loth 1 Qtchn. — 637 Ztnr. 39 ℔ 19 Loth 3 Qtchn. = ?

Ztnr.	100 ℔	32 Lth.	4 Qtchn.
2000	20	10	1
637	39	19	3
1362	80	22	2.

Da man nicht 3 Qtchn. hinwegnehmen kann, wo nur 1 Qtchn. ist, so verwandelt man 1 Loth in Quentchen; 4 Qtchn. — 3 Qtchn. = 1 Qtchn., dazu noch das 1 Qtchn.; so erhält man 2 Qtchn. In der Vollzahl habe ich jetzt nur noch 9 Loth; um daher 19 Loth abziehen zu können, muß man 1 ℔ nehmen. 1 ℔ = 32 Loth; 32 Loth — 19 Loth = 13 Loth; 13 Loth + 9 Loth = 22 Loth. In der Vollzahl sind nun noch 19 ℔; da man hievon 39 ℔ nicht abziehen kann, so nimmt man 1 Ztnr. und verwandelt ihn in ℔. 1 Ztnr. = 100 ℔; 100 ℔ — 39 ℔ = 61 ℔; 61 ℔ + 19 ℔ = 80 ℔. Da man von den 2000 Ztnrn. 1 Ztnr. genommen hat, so sind in der Vollzahl nur noch 1999 Ztnr.; 1999 Ztnr. — 637 Ztnr. = 1362 Ztnr. Der Rest ist also = 1362 Ztnr. 80 ℔ 22 Loth 2 Quentchen.

b.

Das Rechnen mit Zeitgrößen erfordert in der Regel eine eigene Ueberlegung.

1) Man nennt den Zeitraum, in welchem sich die Erde einmal um die Sonne bewegt, ein Jahr, die Zeit, in welcher sich die Erde einmal um ihre Achse dreht, einen Tag, den vierundzwanzigsten Theil des Tages eine Stunde, den sechzigsten Theil einer Stunde eine Minute, den sechzigsten Theil einer Minute eine Sekunde. Der Zeitraum, den man Jahr, und zwar das astronomische Jahr nennt, beträgt 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Sekunden. Im gemeinen Leben muß aber nothwendig immer eine bestimmte Anzahl ganzer Tage auf ein Jahr gerechnet werden, und man nennt diese Anzahl ganzer Tage das bürgerliche Jahr oder das Kalenderjahr. Es ist nach Obigem leicht begreiflich, daß, wenn ein bürgerliches Jahr zu 365 Tagen angenommen wird, ein Fehler von beinahe 6 Stunden, also in 4 Jahren ungefähr ein Fehler von 24 Stunden oder von einem ganzen Tage herauskommt. Nimmt man nun jedes vierte Jahr zu 366 Tagen an, wie dies der Julianische Kalender thut (nach welchem jetzt noch die Russen und Griechen rechnen); so ist dieses Jahr etwas zu lang, denn der jährliche Ueberschuß beträgt nicht ganz 6 Stunden, sondern nur 5 St. 48 Min. 48 Sek. Man rechnet daher nach dem Gregorianischen Kalender *) (nach welchem jetzt alle christlichen Völker, außer den Russen und Griechen, rechnen) auf das letzte Jahr eines Jahrhunderts dreimal nach einander 365, das vierte Mal aber 366 Tage. Das Jahr, welches 365 Tage

---

*) Der Julianische Kalender hat seinen Namen von Julius Cäsar, der 45 Jahre vor Chr. G. das Jahr zu 365 Tagen 6 Stunden festsetzte und bestimmte, daß immer auf 3 Jahre zu 365 Tagen ein viertes zu 366 folgen sollte. Früher hatte jedes Jahr nur 365 Tage. Da man mit der Zeit fand, daß das Julianische Jahr zu lang war, so verordnete Pabst Gregor XIII. im Jahr 1582, daß auf den 4ten Oktober gleich der 15te folgen und daß künftig jedes Jahr, dessen Zahl auf 2 Nullen ausgeht, dreimal hinter einander ein gemeines, das vierte Mal aber ein Schaltjahr sein sollte. Man nennt die verbesserte Gregorianische Zeitrechnung den neuen Stil, die Julianische hingegen den alten Stil. Der Unterschied zwischen dem alten und neuen Stil beträgt von 1800 bis 1900, also gegenwärtig, 12 Tage. An dem Tage, an dem wir den 16. Dezember schreiben, schreiben die Russen und Griechen den 4. Dezember.

zählt, wird ein gemeines Jahr, das Jahr mit 366 Tagen ein Schaltjahr genannt. Um zu erfahren, welche Jahre Schalt- und welche gemeine Jahre sind, untersuche man, ob sich die durch die beiden letzten Ziffern der Jahreszahl ausgedrückte Zahl durch 4 theilen läßt. Bleibt ein Rest, so ist das Jahr ein gemeines; bleibt kein Rest, so ist dasselbe ein Schaltjahr. Der 24. Februar eines solchen Jahres wird als der Schalttag angesehen; daher hat der Februar eines Schaltjahres 29 Tage. Um zu erfahren, ob das Jahr, mit welchem ein Jahrhundert schließt, z. B. 1600, 1700, 1800, 1900, ein Schaltjahr sei, oder nicht; theilt man die Zahl, welche durch die Ziffern vor den Nullen ausgedrückt wird, durch 4. Bleibt bei der Division kein Rest, so ist das Jahr ein Schaltjahr; im Gegentheil nicht.

Noch ist es nothwendig, darauf zu achten, welcher Punkt in der ununterbrochen gleichförmig fortlaufenden Zeit als Anfangspunkt unserer Zeitrechnung angenommen wird. Die Christen zählen bekanntlich die Jahre von Christi Geburt *) an; das erste Jahr beginnt mit dem Tage der Geburt Christi, an welchem Tage demnach schon 1 hätte geschrieben werden müssen. Als ein ganzes Jahr nach Ch. G. verflossen war, schrieb man die Jahreszahl 2 u. s. f. Als man daher 1840 schrieb, waren erst 1839 Jahre seit Ch. G. verflossen, und als 1840 Jahre verflossen waren, schrieb man 1841.

Das Jahr ist in 12 Monate eingetheilt; der Januar ist der erste Monat, der Februar der zweite u. s. w. Wenn wir also Juni schreiben, so sind wir im sechsten Monat, es sind aber erst 5 Monate verflossen; schreiben wir den 7ten Juni, so sind 5 Monate und 6 Tage verflossen. Die Stunden des Tages werden von Mitternacht (12 Uhr des Nachts) an gezählt und zwar erst dann, wenn sie wirklich verflossen sind. Wenn wir sagen: es ist 7 Uhr morgens, so sind wirklich 7 Stunden seit Mitternacht verflossen. Deßgleichen zählen wir die kleineren Theile der Stunden, die Minuten und Sekunden erst dann, wenn sie wirklich verflossen sind. Wenn seit Mitternacht 9 Stunden 8 Minuten 7 Sekunden verflossen sind; so sagt man: es ist morgens 9 Uhr, 8 Minuten, 7 Sekunden. Noch ist zu bemerken, daß

---

*) Die Juden zählen ihre Jahre von Erschaffung der Welt an, die sie in das Jahr 3761 vor Chr. G. setzen. Die Türken zählen von der Flucht Muhameds von Mecca nach Medina an, welche in das Jahr 622 nach Chr. G. fällt.

bei Berechnungen die Stunden von Nachts 1 bis 24 fortgezählt werden, obgleich unsere Uhren nur bis 12 zählen und nach dem Mittag wieder bei 1 anfangen. Als man z. B. schrieb 1839 den 8. Dezember abends halb 4 Uhr, so waren seit Ch. G. 1838 Jahre 11 Monate 7 Tage 15 Stunden und 30 Minuten verflossen. Man nennt die gewöhnliche Angabe der Jahreszahl, des Monates und Tages das Datum; das Datum gibt also nicht die seit Ch. G. verflossene, sondern nur die laufende Zeit an. Es ist in der Regel für die Ausrechnung bequemer, die laufende Zeit in die verflossene zu verwandeln, d. h. zu bestimmen, wie viele Jahre, Monate, Tage u. s. w. nach Angabe des Datums seit Ch. G. verflossen sind.

2) Man kann bei einem Zeitraume 1) den Anfang, 2) die Dauer und 3) das Ende unterscheiden; es kommen daher auch beim Rechnen mit Zeitgrößen 3 Fälle vor: 1) Es kann der Anfang und das Ende eines Zeitraumes bekannt sein, und man will die Dauer desselben wissen. 2) Der Anfang und die Dauer eines Zeitraumes sind bekannt, und es soll daraus das Ende desselben bestimmt werden. 3) Die Dauer und das Ende eines Zeitraumes sind bekannt, und man wünscht den Anfang desselben zu wissen.

1) Ist der Anfang und das Ende eines Zeitraumes bekannt und es soll die Dauer gesucht werden; so ziehe die Zeit, welche beim Anfang verflossen war, von der Zeit ab, welche verflossen war, als der Zeitraum endigte. Z. B.

Friedrich v. Schiller wurde geboren den 10. Nov. 1759 in Marbach am Neckar, und starb zu Weimar den 9. Mai 1805; wie lange hat er gelebt?

Auflös.	Jahre	Monate	Tage.
	1804	4	8
	1758	10	9
	45	5	29

Als Schiller starb, waren 1804 J. 4 M. 8 T. seit Ch. G. verflossen, und als er geboren wurde, 1758 J. 10 M. 9 T.: man erfährt nun die Dauer seines Lebens, wenn man die letztere Zahl von der ersteren abzieht. 9 Tage kann man nicht von 8 Tagen abziehen; man nimmt daher von den 4 Monaten einen Monat; dieses ist der vierte Monat oder der April, welcher 30 Tage hat. 9 von 30 bleiben 21; 21 + 8 = 29 Tage. 10 Monate kann man von 3 Mona-

ten nicht abziehen; man nimmt daher 1 Jahr und verwandelt es in Monate. 12 M. — 10 M. = 2 M.; 2 M. + 3 M. = 5 Monate. 1803 Jahre — 1758 Jahre = 45 Jahre. Also wurde Schiller 45 Jahre 5 Mon. und 29 Tage alt. — Es versteht sich, daß man dasselbe Resultat erhalten hätte, wenn man in der Vollzahl 1805 Jahre und in der Abzugszahl 1759 angenommen haben würde.

2) Ist der Anfang eines Zeitraumes und dessen Dauer bekannt; so findet man das Ende desselben, wenn man zur Zeit, welche beim Anfang verflossen war, die Zeit addiert, welche die Dauer angibt.*) Z. B. Jemand war 1748 den 31. Dez. abends 5 Minuten nach 11 Uhr geboren, und lebte 84 Jahre 2 Monate 1 Tag und 14 Stunden; wann starb er?

Auflös.	Jahre	Monate	Tage	Stunden	Minuten.
	1747	11	30	23	5
	84	2	1	14	—
	1831	13	31	37	5
oder:	1832	2	4	13	5

Als er starb, schrieb man also 1833 den 5. März nachmittags 5 Minuten nach 1 Uhr.

In der Auflösung erhielt man 37 Stunden = 1 Tag + 13 Stunden. 31 Tage + 1 Tag = 32 Tage. Diese Tage kann man nicht in einen Monat verwandeln, ehe man weiß, welchem Monate sie angehören. 2 M. + 11 M. = 13 M. = 1 Jahr + 1 M. — Addiert man nun auch die Jahre und zählt das Jahr, welches man aus den Monaten erhalten, dazu; so hat man 1832 Jahre und 1 Monat, welches der Januar des Jahres 1833 ist. Man muß daher von den 32 Tagen so viele Tage nehmen, als man zum Februar des Jahres 1833 braucht, d. i. 28 Tage, da 1833 kein Schaltjahr ist. Somit bleiben noch 4 Tage stehen, und es waren also im Ganzen 1832 Jahre, 2 Monate, 4 Tage, 13 Stunden und 5 Minuten verflossen; folglich schrieb man: 1833 den 5. März nachmittags 1 Uhr und 5 Minuten.

3) Ist die Dauer eines Zeitraumes und dessen Ende bekannt; so

*) Obgleich diese Aufgabe eigentlich zur Addition gehört; so ist es doch besser, dem Rechnen mit Zeitgrößen hier eine eigene Stelle anzuweisen und die darauf bezüglichen Aufgaben nicht von einander zu trennen.

findet man den Anfang, wenn man von der Zeit, welche verflossen war, als der Zeitraum endigte, die Dauer desselben abzieht. Z. B. Jemand starb 1838 den 7. Okt. abends 3/4 auf 9 Uhr, da er 72 Jahre 5 Monate 7 Tage und 3 Stunden alt war; wann war er geboren?

Auflös.	Jahre	Monate	Tage	Stunden	Minuten.
	1837	9	6	20	45
	72	5	7	3	—
	1765	3	29	17	45

Er war also geboren im Jahr 1766 den 30. April abends 3/4 auf 6 Uhr.

In der Auflösung konnte man die Tage der Abzugszahl von den Tagen der Vollzahl nicht abziehen; man mußte daher den neunten Monat, d. i. den September, in Tage verwandeln. Der September hat 30 Tage; 7 Tage von 30 Tagen bleiben 23 Tage; 23 Tage + 6 Tage = 29 Tage u. s. w.

Beantwortung der Aufgaben.

a.

1) 12 fl. 12 Kzr. 2) 8 fl. 23 Kzr. 3) 28 fl. 34 Kzr. 4) 47 fl. 53 Kzr. 5) 237 fl. 29 Kzr. 6) 2 Fdr. 7 Ohm 9 Stütz. 7) 2 Ohm 6 Stütz. 3 Maß. 8) 3° 6′ 4″. 9) 10 Ohm 4 Stütz. 6 Mß. 10) 3 Fdr. 6 Ohm 4 Stütz. 9 Mß. 11) 28 fl. 27 Kzr. 2 Pf. 12) 157 Dutzend 11 Stück. 13) 72 Pfd. 24 Loth. 14) 5 Ztnr. 40 Pfd. 15) 3 Ztnr. 83 Pfd. 17 Loth. 16) 44 Ztnr. 99 Pfd. 28 Loth 2 Qtchn. 17) 53 Ztnr. 51 Pfd. 29 Loth. 18) 2 Ztnr. 96 Pfd. 28 Loth 2 Qtchn. 19) 1362 Ztnr. 80 Pfd. 22 Loth 2 Qtchn. 20) 9 Morgen 1 Vtl. 24 Ruthen 60 Schuh. 21) 2 Mltr. 7 Sstr. 4 Mßln. 22) 1 Mltr. 7 Sstr. 7 Mßl. 23) 16 Zbr. 9 Mltr. 1 Sstr. 1 Mßln. 24) 6 Ballen 4 Rieß 18 Buch 14 Bogen. 25) 167 fl. 28 Kzr. 26) 343 fl. 25 Kzr. 27) 519 fl. 48 Kzr. 28) 4 Wochen 4 Tage 11 Stund. 29) 80 Ruthen 4 Schuh 4 Zoll. 30) a. 2 Stück 32 Ellen. b. 518 fl. 11 Kzr.

b.

1) 1837 Jahre 5 Monate 10 Tage. 2) 65 Tage.

3) Januar oder Frostmonat = 31 Tage.
Februar „ Hornung = 28 „ , im Schaltj. = 29 T.

März	oder	Lenzmonat	= 31 Tage
April	=	Windmonat	= 30 =
Mai	=	Wonnemonat	= 31 =
Juni	=	Brachmonat	= 30 =
Juli	=	Heumonat	= 31 =
August	=	Erntemonat	= 31 =
September	=	Herbstmonat	= 30 =
Oktober	=	Weinmonat	= 31 =
November	=	Wintermonat	= 30 =
Dezember	=	Christmonat	= 31 =.

4) Ein Schaltjahr hat 366, ein gemeines 365 Tage. 5) 50 Tage, 106 Tage, 307 Tage.

7)

1791	Jahre	6	Monate	3	Tage	21	Stunden.
1807	=	—	=	30	=	21	=
1813	=	6	=	30	=	14	=
1812	=	9	=	17	=	8	=
1820	=	4	=	5	=	16	=
1829	=	6	=	26	=	8	=

8) 1839 den 8. Mai Morgens 3 Uhr. 9) 1840 den 17. November morgens ¾ auf 8 Uhr. 10) 134 Tage. 11) 1832 den 7. Juni abends 5 Uhr. 12) 1838 den 6. Juli nachmittags 1 Uhr. 13) 1820 den 26. Dezbr. nachts 11 Uhr 58 Min. 14) 1885 den 17. Jänner morgens 3 Uhr 17 Min. 15) 1 Jahr 3 Mon. 9 Tage. 18) 1829 den 29. März nachmittags 4 Uhr. 19) 35 Jahre 10 Monate 8 Tage. 20) a. 45 Jahre 5 Mon. 29 Tage. b. 9 Jahre 7 Mon. 21 Tage. 21) 1766 den 30. April abends ¾ auf 6 Uhr. 22) 26 Jahre 4 Mon. 26 Tage 12 Stunden 20 Min. 23) 45 Jahre 2 Mon. 4 Tage 17 Stunden 30 Min. 24) 1742 den 24. März abends 22 Min. nach 8 Uhr. 25) 1805 den 9. Sept. 26) 1833 den 5. März nachmittags 5 Min. nach 1 Uhr. 28) 13 Jahre 6 Mon. 7 Tage. 30) 1816 den 3. April abends 6 Uhr 49 Minuten.

III. Das Vervielfachen.

Beim Vervielfachen muß immer ein Faktor, und zwar der Vervielfacher, eine unbenannte Zahl sein; denn der Vervielfacher zeigt nur an, wie vielmal die Vervielfachungszahl genommen werden soll. Ist das Kind gewöhnt, nur Das auszusprechen, was es entweder sinnlich oder geistig angeschaut hat, was es also versteht, so wird es wohl sa=

gen: 4 fl. sollen mit 5 vervielfacht, oder 4 fl. sollen fünfmal genommen werden, aber nicht: 4 fl. sollen mit 5 fl. vervielfacht werden. Wurde früher die Aufgabe gegeben: Für 1 Batzen erhält man 18 Birnen; wie viel erhält man für 1 fl.? so vervielfacht man nicht 15 Batzen mit 18 Birnen, sondern man fand durch Nachdenken, daß man für 1 fl. oder 15 Batzen fünfzehnmal so viel*) Birnen erhält, als für 1 Batzen, also 15 × 18 Birnen = 270 Birnen.

Ist die Vervielfachungszahl eine mehrfach benannte Zahl, so beachte man folgende Regel:

XII. Wenn mehrfach benannte Zahlen vervielfacht werden sollen; so vervielfache jede einzelne Sorte, von der niedersten angefangen. Lassen sich aus einem Vielfachen Einheiten einer höhern Sorte ziehen; so werden diese herausgenommen und zu dem Vielfachen dieser höhern Sorte gezählt.

Z. B. Es sollen 4 Glocken gegossen werden: man braucht zu jeder 4 Ztnr. 47 Pfd. 24 Lth. 3 Quentchen Metall; wie viel Metall braucht man im Ganzen?

Auflös.	Ztnr.	Pfd.	Lth.	Qtchn.
	4	47	24	3
				4
	16	188	96	12
	17	91	3	—

Wenn man zu einer Glocke 4 Ztnr. 47 Pfd. 24. Lth. 3 Qtchn. Metall braucht, so braucht man zu 4 Glocken viermal so viel; man muß also 4 Ztnr. 47 Pfd. 24 Lth. 3 Qtchn. mit 4 vervielfachen. 3 Qtchn. viermal genommen, geben 12 Qtchn. = 3 Lth.; 4 × 24 Lth. = 96 Lth., 96 Lth. + 3 Lth. = 99 Lth. = 3 Pfd. + 3 Lth.; 4 × 47 Pfd. = 188 Pfd.; 188 Pfd. + 3 Pfd. = 191 Pfd. = 1 Ztnr. + 91 Pfd.; 4 × 4 Ztnr. = 16 Ztnr. 16 Ztnr. + 1 Ztnr. = 17 Ztnr. Also braucht man im Ganzen 17 Ztnr. 91 Pfd. 3 Lth.

Ist der Vervielfacher gleich der Verwandlungszahl der niederen

---

*) Man fasse den Unterschied zwischen „fünfzehnmal so viel“ und „fünfzehnmal mehr“ wohl auf. Nehme ich 2 Mal so viel, als 4, so erhalte ich 8; nehme ich 2 Mal mehr, als 4, so erhalte ich 12.

Sorte in die höhere; so ist die Anzahl der höhern Sorte gleich der Zahl der Sorte, welche vervielfacht werden sollte. Z. B.
60 × 14 Kzr. = 14 × 60 Kzr. = 14 × 1 fl. = 14 fl.

Oft kann man sich die Berechnung dadurch erleichtern, daß man den Vervielfacher durch Hinzufügen oder Hinwegnehmen in eine bequemere Zahl verwandelt; nur muß man alsdann das, was zu viel oder zu wenig genommen worden ist, abziehen oder hinzufügen. Z. B.
61 × 16 Kzr. = 16 × 61 Kzr. = 16 × 60 Kzr. + 16 × 1 Kzr. = 16 × 1 fl. + 16 Kzr. = 16 fl. 16 Kzr. Oder: 31 × 25 Loth = 25 × 31 Loth = 25 × 32 Loth — 25 × 1 Loth = 25 Pfd. — 25 Loth = 24 Pfd. 7 Loth.

Die Antworten zu den Aufgaben sind:

1) 28 fl. 56 Kzr. 2) 7 Pfd. 19 Loth. 3) 25 fl. 40 Kzr. 4) 18 Schuh. 5) 83 Pfd. 6) 182 fl. 17 Kzr. 2 Pf. 7) 57 Pf. 1 Loth 1 Qtchn. 8) 182 fl. 52 Kzr. 2 Pf. 9) 14 fl. 10) 27 Pfd. 11) 8 Ruthen. 12) 14 Buch. 13) 33 Tage. 14) 34 Pfd. 15) 73 Monate. 16) 36 fl. 17) 48 fl. 18) 64 fl. 19) 16 fl. 16 Kzr. 20) 18 Pfd. 18 Loth. 21) 24 Pfd. 7 Loth. 22) 43 fl. 16 Kzr. 23) 109 fl. 30 Kzr. 24) 23 Ztnr. 65 Pfd. 10 Loth. 25) 21 fl. 36 Kzr. 26) 44 fl. 55 Kzr. 27) 388 fl. 36 Kzr. 28) 17 fl. 34 Kzr. 2 Pf. 29) a. 494 fl. 6 Kzr. b. 481 fl. 54 Kzr. 30) 280 fl. 48 Kzr. 31) 169 Ztnr. 89 Pfd. 27 Loth. 32) 93 Ztnr. 82 Pfd. 24 Loth. 33) 17 Ztnr. 91 Pfd. 3 Loth. 34) 2 Jahre 8 Mon. 2 Wochen. 35) 199 Ruthen 9 Schuh. 36) 44 fl. 48 Kzr. 37) 76 fl. 48 Kzr. 38) 84 fl. 39) 31546 fl. 26 Kzr. 40) 1290 fl. 55 Kzr. 41) 30 Fdr. 1 Ohm 2 Stzn. 42) 136 Zbr. 6 Mltr. 5 Sstr. 1 Mßl. 2 Bech. 43) 63 fl. 52 Kzr. 2 Pf. 44) 3091 fl. 12 Kzr. 45) 17089 fl. 24 Kzr. 46) 10 fl. 9 Kzr. 47) 3473 fl. 37 Kzr. 48) a. 66 fl. 45 Kzr. b. 77 fl. 8 Kzr. c. 10 fl. 23 Kzr. 49) 1506 fl. 56 Kzr. 50) 24 fl. 36 Kzr. 1 Pf.

IV. Das Entvielfachen.

1) Es ist nun nothwendig, die Begriffe von Theilen und Messen (Enthaltensein) festzustellen, welche häufig für identisch gehalten werden, da beide die unter dem lateinischen Namen Division bekannte Rechnungsart andeuten. Vergl. §. 7.

8 durch 2 theilen, heißt 8 in 2 gleiche Theile zerlegen, und die Größe eines dieser gleichen Theile bestimmen. Der Theiler ist 2, die

Theilungszahl 8 und der Theil 4. Um die Theilungszahl 8 aus Theil und Theiler zu erhalten, muß man den Theil 4 mit dem Theiler 2 vervielfachen.

Untersuchen, wie oft 2 in 8 enthalten ist, heißt untersuchen: wie vielmal man da 2 hinwegnehmen kann, wo 8 sind. Hier findet man, daß man 2 viermal hinwegnehmen kann.

So wie nun ein Unterschied ist zwischen zweimal 4 und viermal 2; so ist auch ein Unterschied zwischen den beiden Vorstellungen des Theilens und des Messens.

Wenn es nun auch bei unbenannten Zahlen in Bezug auf das Ergebniß gleichgültig ist, ob man das Theilen oder das Messen (das Enthaltensein) anwendet; so liegt doch jedes Mal eine andere Anschauung zu Grunde, und sicher ist, daß, wer die beiden Begriffe aus Unkenntniß verwechselt, viele Aufgaben gar nicht verstehen und also dieselben auch nicht mit Sicherheit berechnen kann. — Ist der Entvielfacher eine unbenannte, die Entvielfachungszahl aber eine benannte Zahl; so kann nur der Begriff des Theilens angewendet werden. Ist z. B. der Entvielfacher = 2, die Entvielfachungszahl = 8 fl., so kann ich nicht fragen: wie oft ist 2 in 8 fl. enthalten? denn, wo 8 fl. sind, kann man nur Gulden, aber nicht die reine (unbenannte) Zahl 2 hinwegnehmen; auch können ungleichartige Dinge nicht in einander enthalten sein, da sie nicht aus einander entstehen können. Die Aufgabe kann daher nur so verstanden werden: wie groß ist der zweite (halbe) Theil von 8 fl.? oder: zerlege 8 fl. in 2 gleiche Theile und bestimme, wie groß ein Theil ist.

Sind Entvielfacher und Entvielfachungszahl benannte Zahlen; so kann nur der Begriff des Messens (Enthaltenseins) in Anwendung kommen. Ist z. B. der Entvielfacher = 2 fl., die Entvielfachungszahl = 8 fl., so kann ich nur fragen: wie oft sind 2 fl. in 8 fl. enthalten? Wollte man eine benannte Zahl zum Entvielfacher, und eine unbenannte zur Entvielfachungszahl annehmen, so ließe sich damit kein Begriff verbinden; eine solche Aufgabe kann also nicht vorkommen.

2) Das Theilen einer einfach benannten Zahl kam schon früher vor; z. B. in der Aufgabe:

Wenn 12 Personen 720 fl. theilen; wie viel erhält eine Person? Es wäre ohne Sinn, hier annehmen zu wollen, daß der Theiler eine benannte Zahl (12 Personen) sei. Man findet denselben durch

folgende Ueberlegung: Wenn 12 Personen 720 fl. theilen, so kommt auf eine Person der zwölfte Theil; ich erfahre also, wie viel eine Person erhält, wenn ich 720 fl. in 12 gleiche Theile zerlege und die Größe eines Theils bestimme. Betrachte ich die Theilungszahl als ein Produkt, welches durch die Vervielfachung zweier Zahlen, des Theilers und des Theils, entstanden ist; so habe ich in obigem Falle eine Zahl gesucht, die mit dem Theiler vervielfacht die Theilungszahl gibt. Der Theiler 12 war also der Vervielfacher (eine unbenannte Zahl), der Theil 60 fl. die Vervielfachunszahl, und die Theilungszahl 720 fl. das Produkt.

Das Enthaltensein oder das Messen kam vor in der Aufgabe: Wie vielmal muß man 17 fl. nehmen, um 391 fl. zu bekommen? — denn es soll gesucht werden, wie vielmal die Entvielfachungszahl 391 fl. den Entvielfacher, (das Maß) 17 fl. enthält oder in sich faßt. Betrachte ich hier die Entvielfachungszahl als ein Produkt, welches durch Vervielfachung des Entvielfachers mit dem Anzeiger entstanden ist; so ist nach der Zahl gefragt, mit welcher der Entvielfacher vervielfacht werden muß, um die Entvielfachungszahl zu erhalten. Der Entvielfacher 17 fl. erscheint also als Vervielfachungszahl, die unbenannte Zahl 23 als Vervielfacher und die Entvielfachungszahl 391 fl. als das Produkt.

3) Kommen in der Theilungszahl mehrere Sorten vor, so beachte man folgende Regel:

XIII. Wenn mehrfach benannte Zahlen getheilt werden sollen; so theile zuerst die höchste Sorte, verwandle den etwa bleibenden Rest in die niedrigere Sorte, zähle die gegebenen Einheiten dieser Sorte dazu, theile diese Summe wieder und fahre so fort, bis sich bei der niedersten Sorte ein Rest ergibt, der kleiner ist als der Theiler. Ist die Menge der höchsten Sorte kleiner als der Theiler, so verwandle sie gleich in die nächst niedere Sorte.

Z. B. 4 Dörfer bearbeiten einen Graben, der 214 Ruthen 5 Schuh 6 Zoll lang ist; wie viel hat jedes Dorf im Durchschnitt zu arbeiten?

Auflös. Wenn 4 Dörfer $214^0\ 5'\ 6''$ zu bearbeiten haben, so kommt auf 1 Dorf nur der vierte Theil von $214^0\ 5'\ 6''$; man muß also $214^0\ 5'\ 6''$ durch 21.4^0 theilen.

4 | 21.4° 5′ 6″ | 53° 6′ 4″

20

14

12

Rest = 2°

10

20′

5

4 | 25′

24

1′

10

10

6

4 | 16″

16

0

Man erhält dasselbe Ergebniß, wenn man alle Sorten zuerst in die niedrigste Sorte verwandelt, alsdann theilt, und zuletzt den gefundenen Theil wieder in die höhern Sorten verwandelt. Jedoch ist dieses Verfahren, als das weitläufigere, nicht zu empfehlen.

4) Beim Messen benannter Zahlen beachte man folgende Regel:

XIV. Soll untersucht werden, wie oft eine benannte Zahl in einer andern benannten, ihr gleichartigen Zahl enthalten ist; so mache diese Zahlen zuerst gleichnamig, wenn sie es nicht schon sind. Ist der Entvielfacher oder die Entvielfachungszahl mehrsortig, oder sind es beide; so verwandle sie in die niedrigste Sorte.

Z. B. Wie vielmal kann man da 6 Stützen hinwegnehmen, wo 3 Ohm 7 Maß sind?

Auflös. 6 Stützen = 60 Maß; 3 Ohm + 7 Maß = 300 Maß + 7 Maß = 307 Maß.

Maß Maß

60 | 307 | $5\frac{7}{60}$ Mal.

300

7

Beantwortung der Aufgaben:

1) 30 Kzr. 2) 1 fl. 48 Kzr. 3) 1 fl. 36 Kzr. 4) 10 fl. 36 Kzr. $3\frac{1}{2}$ Pf. 5) 68 fl. 15 Kzr. $\frac{2}{3}$ Pf. 6) $33\frac{2}{20}$ Kzr. 7) 15 Schafe. 8) 84 fl. $3\frac{6}{10}$ Kzr. 9) 1 fl. $31\frac{14}{16}$ Kzr. 10) 5 fl. $14\frac{4}{7}$ Kzr. 11) 30 Kzr. 12) 5 fl. $54\frac{24}{36}$ Kzr. 13) 6 Kzr. 14) 287 fl. 10 Kzr. $\frac{3}{5}$ Pf. 15) 114 fl. 23 Kzr. $\frac{141}{490}$ Pf. 16) 15 Mal. 17) 32 Mal. 18) 16 Mal. 19) 1442 Mal. 20) 18702 fl. 11 Kzr. $\frac{10}{23}$ Pf. 21) 17 Pfd. 28 Loth $3\frac{11}{16}$ Qtchn. 22) 2 Woch. 3 Tg. $11\frac{2}{9}$ Std. 23) 185 fl. 20 Kzr. $2\frac{39}{54}$ Pf. 24) 12 Jahr 297 Tage 19 Std. $9\frac{3}{5}$ Min. 25) $53^0\ 6'\ 4''$. 26) $416\frac{18}{24}$ Mal. 27) $6\frac{25}{185}$ Mal. 28) $63\frac{298}{998}$ Mal. 29) $31\frac{260}{286}$ Mal. 30) $153\frac{31}{837}$ Mal. 31) $2^0\ 5'\ 5''\ 4'''\ 6\frac{11}{27}{}^{IV}$. 32) $5\frac{7}{60}$ Mal.

---

1) Gulden und Kreuzer, Pfund und Loth sind gleichartige, aber nicht gleichnamige Größen.

6 Gulden und 7 Gulden, 3 Loth und 4 Loth, 8 Wochen und 15 Wochen sind gleichartige und gleichnamige Größen.

2) Die Kinder werden die Frage: Können Größen gleichnamig sein, d. h. denselben Namen führen, wenn sie nicht gleichartig sind? mit Nein beantworten, da sie vermuthlich keine Größen kennen, bei denen dieses stattfindet, und der Lehrer kann sich auch bei dieser Antwort beruhigen. Allein so wie es Dinge gibt, die denselben Namen führen, und nichts weniger als gleichartig sind; so ist es auch möglich, daß es gleichnamige und dabei ungleichartige Größen gebe. Man vergleiche ein deutsches Pfund = 32 Loth mit einem englischen Pfund, d. i. ein Pfund Sterling, seit 1816 wirkliche Goldmünze in England, Sovereigns genannt.

Es können Größen gleichartig sein, ohne denselben Namen zu führen; so sind Pfund und Loth gleichartig, denn beide sind Gewichte.

3) Wenn der Entvielfacher und die Entvielfachungszahl benannte Zahlen sind, so kann nur das Messen angewendet werden. Sollen z. B. 24 Kzr. durch 4 Kzr. entvielfacht werden; so kann nicht getheilt, sondern nur untersucht werden, wie oft 4 Kzr. in 24 Kzr. enthalten sind. Die Zahl, welche durch das Messen

gefunden wird, ist immer unbenannt; sie zeigt nur an, wie vielmal der Entvielfacher in der Entvielfachungszahl enthalten ist. Es ist schon früher §. 7 bemerkt worden, daß das Entvielfachen das Umgekehrte des Vervielfachens ist, daß beim Entvielfachen ein Vielfacher und das Vielfache gegeben sind, und daß das Messen angewendet wird, wenn der gegebene Vielfacher die Vervielfachungszahl ist. Die Zahl, welche durch das Messen gefunden wird, erscheint daher als Vervielfacher und muß mithin unbenannt sein.

4) Wenn der Entvielfacher eine unbenannte, die Entvielfachungszahl aber eine benannte Zahl ist; so wird die Form des Entvielfachens angewendet, welche man das Theilen heißt.

Wenn der Theiler eine unbenannte, die Theilungszahl aber eine benannte Zahl ist, so ist der Theil benannt. Z. B. 24 fl. : 4 = 6 fl.

Wenn Theiler und Theilungszahl unbenannte Zahlen sind, so ist auch der Theil unbenannt. Z. B. 24 : 4 = 6.

5) Der Vervielfacher muß immer eine unbenannte Zahl sein; denn er zeigt nur an, wie vielmal die Vervielfachungszahl genommen werden soll.

6) Nur wenn die benannten Zahlen gleichartig sind, kann ich untersuchen, wie oft die eine in der andern enthalten ist.

Die Größen müssen gleichnamig sein oder gleichnamig gemacht werden, wenn man untersuchen will, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Soll ich untersuchen, wie oft 12 Kzr. in 3 fl. enthalten sind, so müssen die 3 fl. in Kreuzer verwandelt werden. Wer glaubt, das Gleichnamigmachen in solchen Fällen sei nicht nothwendig, der täuscht sich; denn wer spricht: 12 Kzr. sind in 1 fl. fünfmal enthalten, hat sich den Gulden als 60 Kzr. gedacht, ohne dies auszusprechen.

7) Größen, welche zusammengezählt oder abgezogen werden sollen, müssen gleichnamig sein.

8) Wenn eine der 4 Rechnungsarten angewendet werden soll, so müssen wenigstens 2 Zahlen gegeben sein. Beim Zusammenzählen, beim Abziehen und bei der Form des Entvielfachens, welche das Messen heißt, können diese 2 Zahlen beide benannt oder beide unbenannt sein; beim Vervielfachen kann die Vervielfachungszahl benannt oder unbenannt sein, der Verviel-

facher muß immer unbenannt sein; bei der Form des Entvielfachens, welche das Theilen heißt, ist der Theiler immer unbenannt, die Theilungszahl kann benannt oder unbenannt sein.

9) Die Aufgabe 6 + 8 = ? verlangt das Suchen einer Zahl, welche so viel Einheiten enthält, als die 2 Zahlen 6 und 8 zusammengenommen. Die Aufgabe 18 Kzr. — 7 Kzr. = ? verlangt die Angabe des Restes, der bleibt, wenn man da, wo 18 Kzr. sind, 7 Kzr. hinwegnimmt. Die Aufgabe 26 fl. + 13 fl. — 7 fl. = ? verlangt die Anwendung zweier Rechnungsarten, des Zuzählens und des Abziehens. 5 × 8 Kzr. heißt, 8 Kzr. sollen 5 Mal genommen werden. 12 fl. : 3 heißt, von 12 fl. soll der dritte Theil genommen werden. 12 fl. : 3 fl. heißt: es soll untersucht werden, wie oft man da 3 fl. hinwegnehmen kann, wo 12 fl. sind.

10) Ueber die Ausdrücke: Summe, Rest u. s. w. siehe „Rechenunterricht" §. 4, §. 5, §. 6, §. 7.

11) Die Ausdrücke: Zusammenzählen, Abziehen u. s. w. sind in den eben angegebenen §§. im „Rechenunterrichte" erklärt.

12) Gulden werden in Kzr. verwandelt durch das Vervielfachen. Siehe §. 12. Kzr. werden in Groschen verwandelt durch das Entvielfachen. Siehe §. 13, I. b.

13) Die Aufgabe: 1 fl. ist dem Werthe nach = 60 Kzr.; wie viele Kzr. sind 7 fl.? — wird durch das Vervielfachen gelöst. Die Aufgabe: Wie vielmal muß man 13 fl. nehmen, um 416 fl. zu bekommen? — wird durch das Messen gelöst. Die Aufgabe: Wenn 12 Personen 720 fl. theilen; so erhält 1 Person wie viel? — wird durch das Theilen gelöst.

14) Der Werth eines Vielfachen hängt nicht von der Ordnung ab, in welcher die Vielfacher auf einander folgen.

15) Vervielfachung (Theilung) aller Posten ist = Vervielfachung (Theilung) der Summe. Z. B. 6 + 4 = 10; (2 × 6) + (2 × 4) = 2 × 10. (6 : 2) + (4 : 2) = 10 : 2.

Vervielfachung (Theilung) der Vollzahl und der Abzugszahl ist = Vervielfachung (Theilung) des Unterschiedes. 12 — 4 = 8; (2×12)—(2×4)=2×8. (12 : 2) — (4 : 2) = 8 : 2.

Vervielfachung eines Vielfachers ist Vervielfachung des ganzen Vielfachen. Theilung eines Vielfachers ist Theilung des

ganzen Vielfachen. $(6 \times 4) : 2 = 6 \times 4/2 = 6 \times 2$. $6 \times 4 \times 2 = 6 \times 8 = 48$.

16) Eine Summe von lauter unter einander gleichen Posten wird ein Vielfaches (Produkt) genannt. Ein solcher Posten heißt die Vervielfachungszahl (der Multiplikandus), die Anzahl der Posten der Vervielfacher (der Multiplikator). Das Vielfache zweier Zahlen finden, heißt die Vervielfachungszahl mit dem Vervielfacher vervielfachen (multiplizieren).

17) Die Aufgabe: 2×4 fl. = ? wird durch das Vervielfachen gelöst; 2 ist der Vervielfacher, 4 fl. die Vervielfachungszahl und 8 fl. das Vielfache. — Wenn der Vervielfacher 2 und das Vielfache 8 fl. gegeben sind, und die Vervielfachungszahl gesucht werden soll; so erscheint die Zahl, welche in der vorigen Aufgabe der Vervielfacher war, als Theiler, die Zahl, welche das Vielfache war, als Theilungszahl, und die Zahl, welche in der vorigen Aufgabe die Vervielfachungszahl war, erscheint nun als Theil. — In der Aufgabe: Wie vielmal muß man 4 fl. nehmen, um 8 fl. zu erhalten? sind die beiden Zahlen 4 fl. und 8 fl. gegeben, welche in der ersten Aufgabe die Vervielfachungszahl und das Vielfache waren, und indem man untersucht, wie oft 4 fl. in 8 fl. enthalten sind, findet man die Zahl, welche in der ersten Aufgabe der Vervielfacher war.

18) Siehe §. 7.

§. 15.

Vermischte Aufgaben.

a.

Das bisher Erkannte und Geübte soll nun auf verschiedene Weise angewendet werden. Der Schüler hat bei jeder Auflösung anzugeben, welche Rechnungsart dabei angewendet werden muß, und aus welchen Gründen die angegebene Rechnungsart gebraucht wird. Was den Schüler überzeugt hat, daß die bestimmte Rechnungsart angewendet werden muß, das soll er jedes Mal auszusprechen veranlaßt werden; nur dadurch kann der Hauptzweck des Rechenunterrichts erreicht werden, welcher ist: den Schüler zum richtigen Denken und zum besonnenen Handeln anzuleiten.

Da die Aufgaben unter a. ihre Anwendung sehr häufig im bürger-

lichen Leben finden, so sorge der Lehrer auch für tüchtige Einübung und möglichst große Fertigkeit. Die unter den 15 ersten Nummern vorkommenden Aufgaben sind nach der im §. 14 unter IX. aufgestellten Regel zu berechnen.

Die Auflösungen können keine Schwierigkeiten machen; doch folgen hier 2 Beispiele aufgelöst.

1) 120 Kreuzer sind wie viele Groschen?

Auflös. Nach Regel IX. 120 : 3 = 40; also sind 120 Kzr. = 40 Groschen.

2) Was kosten 87 Ellen, wenn 1 Elle 59 Kzr. kostet?

Auflös. a. Wenn 1 Elle 59 Kzr. kostet; so kosten 87 Ellen, 87 Mal 59 Kzr., das sind 87 fl. — 87 Kzr. = 85 fl. 33 Kzr.

b. 87 Ellen kosten 87 × 59 Kzr.; 59 Kzr. = 9 Sechser + 5 Kzr. — 87 × 9 Sechser = 9 × 87 Sechser = 9 × 8 fl. und 9 × 7 Sechser = 72 fl. + 63 Sechser = 78 fl. 18 Kzr. 12 × 5 Kzr. = 1 fl., also 87 × 5 Kzr. = 7 fl. 15 Kzr. 78 fl. 18 Kzr. + 7 fl. 15 Kzr. = 85 fl. 33 Kzr.

c. 87 × 59 Kzr. = 5133 Kzr. = 85 fl. 33 Kzr.

Die meisten Aufgaben in diesem §. können ohne Ziffern berechnet werden; nur wenn zu große Zahlen das Gedächtniß zu sehr beschweren würden, werden die Ziffern zur Unterstützung des Gedächtnisses benützt.

Noch soll einer vortheilhaften Berechnung der Kronenthaler hier Erwähnung geschehen.

1 Kronenth.	=	2,7 fl.	(2 7/10 fl.);	10 Kronenth.	=	27 fl.
2 "	=	5,4 "	(5 4/10 ");	20 "	=	54 "
3 "	=	8,1 "	(8 1/10 ");	30 "	=	81 "
4 "	=	10,8 "	(10 8/10 ");	40 "	=	108 "
5 "	=	13,5 "	(13 5/10 ");	50 "	=	135 "
6 "	=	16,2 "	(16 2/10 ");	60 "	=	162 "
7 "	=	18,9 "	(18 9/10 ");	70 "	=	189 "
8 "	=	21,6 "	(21 6/10 ");	80 "	=	216 "
9 "	=	24,3 "	(24 3/10 ");	90 "	=	243 "
10 "	=		27 ";	100 "	=	270 "

Will man wissen, wie viel fl. 800 Kronenthaler betragen, so würde man demnach urtheilen und schließen: 8 Kronenth. = 21 6/10 fl. = 216/10 fl.; 80 Kronenth. = 10 × 216/10 fl. = 216 fl.; 800 Kronenth. = 2160 fl.

Anm. Setzt man hinter die Ziffer in der Einerstelle einen Beistrich zum Zeichen, daß diese Stelle stets als Einerstelle betrachtet werden solle; so wird der Werth jeder Ziffer in der weiter rechts gehenden Stelle den zehnten Theil des Werthes der Ziffer in der vorhergehenden Stelle betragen. Dadurch wird die schriftliche Bezeichnung sehr vereinfacht, wenn Brüche vorkommen, deren Nenner 10, oder 100, oder 1000 u. s. w. sind. Statt $2^7/_{10}$ kann man also schreiben: 2,7; also sind 8 Kronenth. = 21,6 fl., 80 Kronenth. = 216 fl. S. §. 17.

Beantwortung der Aufgaben.

1) 40 Groschen, 30 Batzen, 24 Fünfer, 20 Sechser, 12 Zehner, 10 Dreibätzner, 5 Sechsbätzner, 4 halbe Gulden, 2 fl. 2) 4 fl. 3) 5 fl. 4) 10 fl., 15 fl., 20 fl., 35 fl., 45 fl. 5) 34 fl. 15 Kzr., 16 fl. 12 Kzr., 8 fl. 57 Kzr., 49 fl. 3 Kzr. 6) 6 fl. 7) 6 fl. 40 Kzr., 8 fl., 12 fl., 18 fl., 18 fl. 40 Kzr., 20 fl., 24 fl., 26 fl. 40 Kzr., 30 fl., 48 fl. 40 Kzr. 8) 8 fl. 9) 10 fl., 11 fl., 20 fl., 30 fl., 40 fl., 50 fl., 60 fl., 90 fl., 18 fl., 21 fl. 36 Kzr., 34 fl. 30 Kzr., 48 fl. 12 Kzr., 96 fl. 18 Kzr., 118 fl. 42 Kzr., 189 fl. 42 Kzr., 200 fl. 10) 10 fl. 11) 14 fl., 9 fl., 12 fl., 6 fl. 30 Kzr., 7 fl. 30 Kzr., 14 fl. 20 Kzr., 19 fl. 30 Kzr., 16 fl. 10 Kzr., 16 fl. 40 Kzr., 31 fl. 30 Kzr., 33 fl. 20 Kzr. 12) 4 fl. 13) 6 fl., 8 fl., 10 fl., 12 fl., 18 fl., 20 fl., 24 fl., 34 fl., 40 fl., 80 fl., 114 fl., 200 fl. 14) 2 fl. 15) 8 fl., 16 fl., 24 fl., 28 fl., 32 fl., 36 fl., 40 fl., 80 fl., 160 fl., 400 fl., 40 fl. 24 Kzr., 50 fl., 108 fl., 138 fl., 74 fl. 48 Kzr., 113 fl. 12 Kzr. 16) 3 fl. 40 Kzr. 17) 4 fl. 51 Kzr., 6 fl. 28 Kzr., 8 fl. 5 Kzr., 9 fl. 42 Kzr., 11 fl. 19 Kzr., 12 fl. 56 Kzr., 14 fl. 33 Kzr., 16 fl. 10 Kzr., 19 fl. 24 Kzr., 24 fl. 15 Kzr., 29 fl. 6 Kzr., 32 fl. 20 Kzr., 38 fl. 48 Kzr., 48 fl. 30 Kzr., 58 fl. 12 Kzr., 67 fl. 54 Kzr., 77 fl. 36 Kzr., 87 fl. 18 Kzr. 18) 7 fl. 35 Kzr., 9 fl. 45 Kzr., 11 fl. 55 Kzr., 14 fl. 5 Kzr., 18 fl. 25 Kzr., 20 fl. 35 Kzr., 22 fl. 45 Kzr., 24 fl. 55 Kzr., 30 fl. 20 Kzr., 37 fl. 55 Kzr., 50 fl. 55 Kzr. 19) 85 fl. 33 Kzr. 20) 150 fl. 24 Kzr. 21) 104 fl. 50 Kzr. 22) 57 fl. 23) 141 fl.

24)	1. 1 fl. 38 Kzr.	8. 13 fl. 4 Kzr.	15. 24 fl. 30 Kzr.
	2. 3 = 16 =	9. 14 = 42 =	16. 26 = 8 =
	3. 4 = 54 =	10. 16 = 20 =	17. 27 = 46 =
	4. 6 = 32 =	11. 17 = 58 =	18. 29 = 24 =
	5. 8 = 10 =	12. 19 = 36 =	19. 31 = 2 =
	6. 9 = 48 =	13. 21 = 14 =	20. 32 = 40 =
	7. 11 = 26 =	14. 22 = 52 =	21. 34 fl. 18 =

22. 35 fl. 56 Kzr.	35. 57 fl. 10 Kzr.	48. 78 fl. 24 Kzr.
23. 37 = 34 =	36. 58 = 48 =	49. 80 = 2 =
24. 39 = 12 =	37. 60 = 26 =	50. 81 = 40 =
25. 40 = 50 =	38. 62 = 4 =	51. 83 = 18 =
26. 42 = 28 =	39. 63 = 42 =	52. 84 = 56 =
27. 44 = 6 =	40. 65 = 20 =	53. 86 = 34 =
28. 45 = 44 =	41. 66 = 58 =	54. 88 = 12 =
29. 47 = 22 =	42. 68 = 36 =	55. 89 = 50 =
30. 49 = — =	43. 70 = 14 =	56. 91 = 28 =
31. 50 = 38 =	44. 71 = 52 =	57. 93 = 6 =
32. 52 = 16 =	45. 73 = 30 =	58. 94 = 44 =
33. 53 = 54 =	46. 75 = 8 =	59. 96 = 22 =
34. 55 = 32 =	47. 76 = 46 =	60. 98 = — =

25) 3 fl. 30 Kzr. 26) 79 fl. 30 Kzr.

b.

1) a. 2643 Kzr. b. 44 fl. 3 Kzr. 2) 26 Mltr. 1 Sstr. 5 Mßln. 3) 2 fl. 52 Kzr. 4) 9 Jahre. 5) 273 Mann, 71 fl. bleiben übrig. 6) 57 fl. 7) 322 fl. 25 Kzr. 8) 5 fl. 40 Kzr. 9) 60 fl. 48 Kzr. 10) 115 fl. 12 Kzr. 11) 144 fl. 12) 99 fl. 13) $63^0\,7''\,4'''$. 14) a. 93 Jahre : 4 = 23 Jahre 91 Tge. 6 Stdn. b. 69 Jahre 273 Tge. 18 Stdn. 15) 465 fl. 49 Kzr. $1\frac{1}{19}$ Pf. 16) 16. 17) a. 2 fl. 40 Kzr. b. 125 fl. 20 Kzr. 18) a. 383 fl. 20 Kzr. b. 407 fl. c. 3 fl. $32\frac{8}{23}$ Kzr.

c.

1) $2 + 3 \times 4$ sollte eigentlich geschrieben werden: $2 + (3 \times 4)$. Um aber so viel als möglich Klammern zu ersparen, ist man dahin übereingekommen, daß, wo ein Ausdruck wegen Mangel an Klammern unbestimmt bleibt, die höheren Rechnungsarten immer vor den niedrigern, also Multiplikation und Division immer vor der Addition und Subtraktion vorgenommen werden sollen. Kommen Addition und Subtraktion, oder Multiplikation und Division in einem Ausdrucke vor; so kann man unbeschadet des Werthes die eine oder die andere dieser Rechnungsarten zuerst anwenden. Man rechnet daher auch Addition und Subtraktion zur ersten Klasse, Multiplikation und Division zur zweiten Klasse der Operationen und hat folgende Regel aufgestellt:

Wenn Rechnungsarten vorkommen, welche nicht zu einer und derselben Klasse gehören; so nehme die Rechnungsart zuerst vor, welche zu der höhern Klasse gehört.

Soll diese Regel nicht befolgt werden, so muß dieses durch Klammern bezeichnet werden. Z. B. $(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$; $(8 - 5) \times 4 = 3 \times 4 = 12$; $(6 + 2) \times (5 + 3) = 8 \times 8 = 64$; $(6 - 2) \times (5 - 3) = 4 \times 2 = 8$.

$(12 - 4) : 2 = \frac{12 - 4}{2} = 6 - 2 = 4$; denn Theilung der Voll- und der Abzugszahl = Theilung des Unterschiedes.

$(12 - 4) : (2 + 2) = \frac{12 - 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} - \frac{4}{4} = 2.$

2) $3 + 4 \times 5 = 23$; $(3 + 4) \times 5 = 35$; $6 + 2 \times 7 - 5 = 15$; $(6 + 2) \times 7 - 5 = 51$; $(6 + 2) \times (7 - 5) = 16$; $12 + 6 : 2 = 15$; $(12 + 6) : 2 = 9$; denn Theilung aller Posten = Theilung der Summe. $(12 + 6) : (7 + 2) = \frac{12 + 6}{9} = \frac{18}{9} = 2.$

3) $3116 + 768 \times 49 = 40748$; $(8027 - 349) : 19 = 404\frac{2}{19}$; $(625 + 48) \times 90 = 60570$; $19613 - 238 \times 124 : 4 = 12235$; $(8017 - 569) : 87 = 85\frac{53}{87}$.

4) $\frac{(16530 + 8217 - 789) \times 570}{5} = (16530 + 8217 - 789) \times \frac{570}{5} = 2731212.$

Wenn zusammenzuzählen und abzuziehen ist; so ist es in Bezug auf die Richtigkeit der Rechnung gleichgültig, welche Rechnungsart zuerst vorgenommen wird; jedoch wird die Rechnung vereinfacht, wenn zuerst abgezogen wird. Der denkende Rechner wird daher in diesem Falle stets die Subtraktion der Addition vorangehen lassen.

Wenn zu vervielfachen und zu theilen ist; so wird die Rechnung leichter, wenn man zuerst theilt, sobald sich durch den ganzen Theiler oder durch einen Faktor des Theilers theilen läßt.

5) $\frac{(17829 - 673 + 568) \times 749}{750} = 17700\frac{276}{750}.$

6) $(31387 + 627) \times (18316 - 7528) = 345367032.$

7) $(8425 + 17063) : (890 - 25) = 29\frac{403}{865}$;

$\frac{(1027 - 958)(1612 - 783)}{26 + 870} = 63\frac{753}{896}.$

8) $\left[(1628 - 349)(756 + 3907)\right] : (803 - 269) = 11168\frac{265}{534}$.

9) $\dfrac{(7056 - 1098 + 476 - 23)(769 + 40)}{2907 - 107} = 1852\frac{899}{2800}$.

Anm. Wenn zu einem eingeklammerten Ausdrucke eine Zahl oder ein anderer Ausdruck in Klammern ohne Rechnungszeichen gesetzt wird; so muß stets die Multiplikation vorgenommen werden. Z. B. $(3 + 4)\,6 = 42$; $(2 + 3)(3 + 4) = 5 \times 7$.

§. 16.

Das Zerlegen der Zahlen in Faktoren und das Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

1) Wenn ich 6 durch 3 entvielfache, so erhalte ich 2. Die Entvielfachungszahl 6 kann ich mir entstanden denken durch Vervielfachung der beiden Zahlen 3 und 2; in diesem Falle betrachte ich 3 und 2 als die Vielfacher (Faktoren) von 6. Man kann daher jede Zahl, welche in einer andern Zahl ohne Rest enthalten ist, als einen Vielfacher dieser Zahl ansehen. Es ist 3 ein Vielfacher von 12, 6 ein Vielfacher von 30 u. s. w. So wie ich mir die Zahl 6 durch Vervielfachung der Zahlen 2 und 3 entstanden denke; so kann 10 durch Vervielfachung der Zahlen 2 und 5, 28 durch Vervielfachung der Zahlen 4 und 7 entstanden gedacht werden. Solche Zahlen lassen sich dann auch wieder in die Faktoren zerlegen, durch deren Vervielfachung sie entstanden sind; z. B. $6 = 2 \times 3$; $10 = 2 \times 5$. Es lassen sich jedoch nicht alle Zahlen durch Vervielfachung von zwei oder mehreren ganzen Zahlen entstanden denken, da 1 nicht vervielfacht, also nicht als (eigentlicher) Faktor angesehen werden kann; z. B. 5, 7, 11, 13, 17 u. s. w. Solche Zahlen, welche aus Faktoren entstanden gedacht werden können, und welche sich also auch in Faktoren zerlegen lassen, nennt man zusammengesetzte Zahlen; z. B. 4, 6, 8, 10, 12, 60. Diejenigen Zahlen, welche nicht aus Faktoren entstanden gedacht werden können, welche sich also auch nicht in Faktoren zerlegen lassen, heißen *einfache* oder *ursprüngliche Zahlen*, *nicht zusammengesetzte Zahlen*, *Primzahlen*. Z. B. 5, 11, 17. Einfache Zahlen lassen sich nur durch 1 und durch sich selbst messen. Jede Zahl, welche nicht schon Primzahl ist, besteht aus völlig bestimmten Primzahlen, und dieselbe Zahl läßt sich nicht aus andern Primzahlen durch Multiplikation zusammensetzen. Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich wenigstens in 2 Faktoren zerlegen; sind

diese Faktoren nicht einfache Zahlen, so lassen sie sich wieder zerlegen, und so kommt man endlich durch fortgesetzte Zerlegung auf die kleinsten Faktoren einer Zahl, d. h. auf solche, die keiner Zerlegung in Faktoren mehr fähig, also selbst einfache Zahlen sind. Z. B. 12 besteht aus den Faktoren 2 und 6; 6 läßt sich aber wieder zerlegen*) in die Faktoren 2 und 3; also besteht 12 aus dem Faktor 2 zweimal genommen und aus dem Faktor 3; $12 = 2 \times 2 \times 3$. Auf dasselbe Resultat wären wir gekommen, wenn wir 12 zuerst in die beiden Faktoren 3 und 4 zerlegt hätten. Sind die Faktoren, in welche eine zusammengesetzte Zahl zerlegt worden ist, Primzahlen; so nennt man sie einfache oder kleinste Faktoren, im entgegengesetzten Falle dagegen zusammengesetzte Faktoren der gegebenen Zahl.

2) Um eine zusammengesetzte Zahl in ihre kleinsten Faktoren zu zerlegen, muß man dafür sorgen, daß man lauter Primzahlen zu den Divisionsversuchen nehme. Man theile sie daher zuerst durch 2 und wiederhole die Theilung mit 2 so oft es angeht; dann theile man durch 3, dann durch 5, ferner durch 7, und so fort auch mit den folgenden einfachen Zahlen. Bleibt bei der Theilung ein Rest, so ist der Divisor kein Faktor der gegebenen Zahl. Wird der Quotient kleiner, als der Divisor; so können keine größeren Primzahlen mehr Faktoren dieser Zahl sein, und man hat mit dem letzten aufgehenden Divisor die kleinsten Faktoren alle gefunden. Z. B.

	Oder:
$480 : 2 = 240$	
$240 : 2 = 120$	$480 = 2 \times 240$
$120 : 2 = 60$	2×120
$60 : 2 = 30$	2×60
$30 : 2 = 15$	2×30
$15 : 3 = 5$	2×15
$5 : 5 = 1$	3×5

Also sind die kleinsten Faktoren von $480 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$, oder: 480 besteht aus dem Faktor 2 fünfmal genommen, dem Faktor 3 einmal und dem Faktor 5 einmal $= 2^5 \times 3 \times 5$.

3) Wenn eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist, so ist diese Zahl ein Vielfaches der ersten Zahl. Jedes Vielfache einer Zahl

---

*) Es versteht sich, daß hier nie von einer Zerlegung in Posten, sondern nur von einer Zerlegung in Faktoren die Rede ist.

muß die einfachen Faktoren dieser Zahl in sich fassen. Wenn zwei Zahlen in einer andern Zahl enthalten sind, so ist diese Zahl das gemeinschaftliche Vielfache der beiden Zahlen; und dieses Vielfache muß die einfachen Faktoren der beiden Zahlen wenigstens ein Mal in sich fassen. Wenn dieses gemeinschaftliche Vielfache außer den einfachen Faktoren der beiden Zahlen keine anderen Faktoren enthält, so ist es das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen darf also keinen Faktor enthalten, der nicht unumgänglich nöthig ist, um durch jede dieser Zahlen ohne Rest dividiert werden zu können.

4) Wenn zu zwei oder mehr gegebenen Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gesucht werden soll, so ergeben sich drei Fälle:

1) Die kleineren Zahlen sind in der größten ohne Rest enthalten; z. B. 2, 4; 8, 16.
2) Die Zahlen haben einen oder mehrere gemeinschaftliche Faktoren; z. B. 6 und 8.
3) Die Zahlen haben keinen gemeinschaftlichen Faktor; z. B. 5 und 7.

Man beachte daher folgende Regeln:

1) Wenn die kleineren Zahlen in der größten ohne Rest enthalten sind, so ist die größte Zahl das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

2) Wenn mehrere gegebene Zahlen gemeinschaftliche Faktoren haben; so nehme zu den einfachen Faktoren der ersten Zahl die einfachen Faktoren der zweiten Zahl, welche nicht schon in der ersten vorkommen, dazu noch die einfachen Faktoren der dritten Zahl, welche nicht schon unter den bisher genommenen Faktoren vorkommen u. s. w. Das Produkt aller auf diesem Wege genommenen einfachen Faktoren ist das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

3) Wenn die gegebenen Zahlen keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so ist das Produkt dieser Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Beantwortung der Fragen und Aufgaben:

a.

1) 6, 9, 12. 2) 3 ist ein Vielfacher von 6, 9, 12 u. s. w., denn 6, 9, 12 sind Vielfache, von denen 3 der eine Vielfacher ist. 12 ist ein Vielfaches von 3.

3) 4 ist in jeder Zahl ohne Rest enthalten, die ein Vielfaches von 4 ist; also in $2 \times 4 = 8$, in $3 \times 4 = 12$ u. s. w.

4) $12 = 2 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 = 3 \times 4 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 12 \times 1 = 1 \times 12$.

5) 24 ist ohne Rest theilbar durch 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

6) $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Anm. Man hüte sich $2 \times 2 \times 2$ zu verwechseln mit 3×2. Im ersten Falle habe ich den Faktor 2 dreimal, im zweiten Falle habe ich den Faktor 3 einmal und den Faktor 2 einmal.

7) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

Man frage hier: Wie hast du 81 gefunden? — Wie vielmal hast du 3 als Vielfacher gesetzt? — Ist 81 ein Vielfaches aus gleichen oder aus ungleichen Vielfachern? — Nenne ein Vielfaches aus 3 gleichen Vielfachern! — Nenne ein Vielfaches aus 3 ungleichen Vielfachern!

8) $8 = 2 \times 2 \times 2$. Statt $2 \times 2 \times 2$ setzt man gewöhnlich 2^3. 2^3 heißt also, 2 soll dreimal als Faktor gesetzt werden.

9) Wenn 8 in einer andern Zahl enthalten sein soll, so muß der Vielfacher 2 dreimal in der andern Zahl vorkommen.

10) 8 ist in jedem Vielfachen von 8 ohne Rest enthalten; also in 16, 24, 32 u. s. w.

11) Eine Zahl, die in einer andern aufgeht, nennt man auch ein Maß dieser Zahl; 5 ist also ein Maß von 10, 15, 20 u.s.w., d. h. 10, 15, 20 kann durch 5 gemessen werden, oder 5 ist in 10, 15, 20 ohne Rest enthalten.

12) $6 = 2 \times 3$.

13) $4=2\times2$; $8=2\times2\times2$; $10=2\times5$; $12=2\times2\times3$; $14=2\times7$; $16=2\times2\times2\times2$; $18=2\times3\times3$; $20=2\times2\times5$; $24=2\times2\times2\times3$; $28=2\times2\times7$; $30=2\times3\times5$; $32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$; $34=2\times17$; $36=2\times2\times3\times3$; $40=2\times2\times2\times5$; $48=2^4\times3$; $54=2\times3\times3\times3=2\times3^3$; $60=2\times2\times3\times5$; $64=2^6$; $70=2\times5\times7$; $80=2^4\times5$; $84=2^2\times3\times7$: $90=2\times3\times3\times5$; $96=2^5\times3$; $81=3^4$; $100=2^2\times5^2$; $120=2^3\times3\times5$; $180=2^2\times3^2\times5$; $200=2^3\times5^2$; $300=2^2\times3\times5^2$; $320=2^6\times5$; $360=2^3\times3^2\times5$; $400=2^4\times5^2$; $500=2^2\times5^3$; $800=2^5\times5^2$; $900=2^2\times3^2\times5^2$; $960=2^6\times5\times3$; $1000=2^3\times5^3$.

14) 12 besteht aus $2 \times 2 \times 3$; 12 ist also in allen Zahlen enthalten, in denen der Faktor 2 zweimal und der Faktor 3 einmal vorkommt.

15) 4 ist in jeder Zahl enthalten, in welcher der Faktor 2 zweimal

vorkommt, denn 4 ist $= 2 \times 2$. 6 ist in jeder Zahl enthalten, in welcher der Faktor 2 einmal, und der Faktor 3 einmal vorkommen. Mithin sind 4 und 6 in jeder Zahl enthalten, in welcher der Faktor 2 zweimal und der Faktor 3 einmal vorkommen. Solche Zahlen sind 12, 24 u. s. w.

16) 4 ist in 12 enthalten, und 6 ist in 12 enthalten; also ist sowol 4 als 6 in jeder Zahl enthalten, in welcher 12 enthalten ist. Um nun zu untersuchen, in welcher Zahl 12, 15 und 30 aufgehen, zerlege ich diese Zahlen in ihre kleinsten Faktoren.

$$12 = 2 \times 2 \times 3;\quad 15 = 3 \times 5;\quad 30 = 2 \times 3 \times 5.$$

Soll 12 in einer Zahl aufgehen, so müssen in dieser Zahl der Faktor 2 zweimal und der Faktor 3 einmal vorkommen; 15 geht in jeder Zahl auf, in welcher der Faktor 3 einmal und der Faktor 5 einmal vorkommen; 30 geht in jeder Zahl auf, in welcher der Faktor 2 einmal, der Faktor 3 einmal und der Faktor 5 einmal vorkommen. 12, 15 und 30 gehen daher in jeder Zahl auf, in welcher der Faktor 2 zweimal, der Faktor 3 einmal und der Faktor 5 einmal vorkommen. $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$; also ist 60 die Zahl, in der 12, 15 und 30 aufgehen.

17) 2, 4, 8, 16, 32, 64, gehen alle in 64 auf.

18) 120. 19) 9009. 20) 360.

b.

1) Die einfachen Vielfacher der Zahl 7 sind 1 und 7.

2) 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 u. s. w. sind einfache Zahlen. Außer 2 ist jede gerade Zahl auch eine zusammengesetzte Zahl.

3) Die kleinsten Vielfacher der Zahlen 17, 113 und 119 sind 1 und 17, 1 und 113, 7 und 17.

4) Diejenige Zahl, durch welche sich 2 Zahlen ohne Rest messen lassen, nennt man das gemeinschaftliche Maß dieser 2 Zahlen. 4 und 6 haben das gemeinschaftliche Maß 2.

5) 10, 15, 20.

6) Jede Zahl, welche nur durch 1 und durch sich selbst gemessen werden kann, ist eine Primzahl an sich oder eine absolute Primzahl. Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, nennt man Primzahlen unter sich oder re-

lative Primzahlen, wenn auch jede einzelne eine zusammengesetzte Zahl sein sollte; z. B. 3 und 8, 6 und 25, 9 und 16.

Primzahlen an sich sind nothwendig auch Primzahlen unter sich, denn sie haben keinen gemeinschaftlichen Faktor außer 1. — Primzahlen unter sich sind aber nicht nothwendig Primzahlen an sich. 3 Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, ohne Primzahlen zu sein, oder mit andern Worten: 3 Zahlen, welche Primzahlen unter sich sind, ohne Primzahlen an sich zu sein, sind: 4, 9, 25.

7) Das gemeinschaftliche Maß aller Zahlen, d. h. die Zahl, welche in allen Zahlen ohne Rest enthalten ist, ist 1.

8) Eine Zahl, die in einer andern aufgeht, heißt das Maß dieser Zahl. Jedes Maß einer Zahl kann auch als Faktor dieser Zahl angesehen werden.

9) Wenn 6 mit einem andern Faktor das Produkt 162 bildet, so erhalte ich den andern Faktor, wenn ich 162 durch 6 entvielfache. Der Faktor 6 wird zum Divisor, 162 zur Entvielfachungszahl und der andere Faktor erscheint als Quotient.

$162 : 6 = 27$; der andere Faktor ist also 27; er wurde durch Division gefunden. (§. 7.)

Folgerungen und Zusätze.

1) Wenn eine Zahl in einer andern aufgeht, so geht sie auch in jedem Vielfachen von ihr auf. Z. B. 3 ist ein Maß von 6, also auch ein Maß von $7 \times 6 = 42$.

2) Geht eine Zahl in einer andern auf, so geht auch der entstehende Quotient in dieser andern auf. 7 geht in 42 auf und gibt den Quotienten 6; also muß 6 auch in 42 aufgehen.

3) Geht eine Zahl in einer andern nicht auf, so geht auch kein Vielfaches von ihr in dieser andern Zahl auf. Z. B. 9 geht in 100 nicht auf; also gehen auch 18, 27 u. s. w. in 100 nicht auf.

4) Wenn eine Zahl jede von 2 oder mehreren andern Zahlen mißt, so mißt sie auch deren Summe.

3 geht in 12 ohne Rest auf,
3 = = 24 = = =
3 = = 30 = = =

folglich geht auch 3 in 12 + 24 + 30 = 66 ohne Rest auf; denn es ist gleichgültig, ob ich die Summe theile, oder ob ich jeden der Posten theile und die Quotienten addiere.

5) Das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß ihres Unterschiedes.

3 ist ein Maß von 36,
3 = = = = 12;

also ist 3 auch ein Maß von 36 — 12 = 24.

6) Wenn bei einer Division kein Rest bleibt, und eine Zahl mißt den Divisor oder den Quotienten, so mißt sie auch die Entvielfachungszahl. Denn die Entvielfachungszahl ist ein Produkt aus dem Divisor und dem Quotienten; wenn nun eine Zahl einen der beiden Faktoren mißt, so mißt sie auch das Produkt.

40 : 8 = 5. 4 mißt den Entvielfacher, also auch die Entvielfachungszahl; 5 mißt den Quotienten, also auch die Entvielfachungszahl.

7) Wenn bei einer Theilung ein Rest bleibt, so gelten folgende Sätze:

a. Wenn eine Zahl den Divisor und den Rest mißt, so mißt sie auch die Theilungszahl. Denn die Theilungszahl ist = dem Produkte aus dem Divisor und Quotienten + dem Reste; da nun die gegebene Zahl den Divisor mißt, so mißt sie auch das Produkt aus dem Divisor und Quotienten, und da sie den Rest mißt, so mißt sie auch die Summe des Produktes und des Restes. Z. B.

6 | 32 | 5
30
—
2

2 mißt den Theiler 6 und den Rest 2, also mißt 2 auch 5 × 6 + 2 = 32.

b. Wenn eine Zahl den Quotienten und den Rest mißt, so mißt sie auch die Theilungszahl. Diese Wahrheit erhellt aus denselben Gründen.

Z. B. 12 | 75 | 6
72
—
3

3 mißt den Quotienten 6 und den Rest 3, also mißt 3 auch 6 × 12 + 3 = 75.

c. Eine Zahl, welche den Divisor und die Theilungszahl oder den Quotienten und die Theilungszahl mißt, geht auch im Reste auf.

Denn die Theilungszahl ist gleich dem Produkte aus dem Divisor und Quotient + dem Rest; also ist der Rest = der Theilungszahl weniger dem Produkte aus dem Divisor und Quotient. Wenn nun die gegebene Zahl in der Theilungszahl und zugleich im Divisor oder im Quotient enthalten ist, so ist sie auch im Produkte aus dem Divisor und Quotienten enthalten. Wenn aber eine Zahl zwei andere Zahlen mißt, so mißt sie auch ihren Unterschied; also die Theilungszahl — dem Produkte aus dem Divisor und Quotienten, d. h. den Rest.

Z.B. 15 | 1359 | 90
1350
9

3 mißt 15 und 1359; also auch 1359 — 90 × 15 = 9, d. h. den Rest.

Oder: 60 | 1694 | 28
1680
14

7 mißt 28 und 1649; also auch 1649 — 60 × 28 = 14, d. h. den Rest.

d. Die größte Zahl, welche den Theiler und den Rest theilt, ist auch die größte, welche Theiler und Theilungszahl theilt. Denn, wenn eine größere Zahl Theiler und Theilungszahl theilte; so müßte diese ja auch den Rest, also auch Theiler und Rest theilen, was gegen die Voraussetzung ist.

Z. B. 84 : 18 = 4 mit dem Reste 12. Die größte Zahl, welche Theiler und Rest theilt, ist 6; also ist 6 auch die größte Zahl, welche Theiler und Theilungszahl theilt.

8) Wenn 2 Zahlen einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so nennt man denselben auch ihr gemeinschaftliches Maß. Zahlen, welche ein gemeinschaftliches Maß haben, können durch dasselbe ohne Rest dividiert werden. Wenn es keine größere Zahl gibt, durch welche diese Zahlen ohne Rest dividiert werden können, so wird das gemeinschaftliche Maß das größte genannt. Das größte gemeinschaftliche Maß kann nicht größer sein, als die kleinste der beiden Zahlen. Will man daher das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen finden, so untersuche man, wie oft die kleinere Zahl in der größeren enthalten ist; bleibt kein Rest,

so ist die kleinere Zahl selbst das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen. Z. B.

Es soll das größte gemeinschaftliche Maß der 2 Zahlen 317 und 1902 gesucht werden.

1902 : 317 = 6.

Da 317 in 1902 aufgeht, so ist 317 das größte gemeinschaftliche Maß dieser 2 Zahlen.

Sind hingegen die 2 Zahlen 105 und 745 gegeben; so finden wir, daß die kleinere Zahl in der größern 7 Mal enthalten ist, jedoch 10 als Rest bleibt.

```
105 | 745| 7
      735|
      ---|
       10|
```

Hier geht 105 wol in 7 × 105 = 735 auf, aber nicht in dem Reste 10. Das gemeinschaftliche Maß der 2 Zahlen 105 und 745 muß aber in dem Divisor 105 und in dem Reste 10 aufgehen (vergl. 7, a.); dasselbe kann also nicht größer sein, als der Rest, und wir untersuchen daher zunächst, ob vielleicht der Rest 10 das gemeinschaftliche Maß sei.

```
10 | 105| 10
     100|
     ---|
       5|
```

Würde der Rest 10 in 105 aufgegangen sein, so wäre 10 das gemeinschaftliche Maß gewesen; denn eine Zahl, welche den Divisor und den Rest mißt, mißt auch die Theilungszahl. Da aber wieder ein Rest bleibt, nämlich 5, so kann das gemeinschaftliche Maß nicht größer sein, als 5. Wir untersuchen nun, ob dieser zweite Rest 5 in dem ersten Reste 10 aufgeht; denn mißt er diesen, so mißt er auch die kleinere Zahl 105, und folglich auch die größere 745.

```
5 | 10| 2
    10|
    --|
     0|
```

5 ist in 10 ohne Rest enthalten; also ist 5 das größte gemeinschaftliche Maß.

Es ergibt sich daher folgende Regel:

Um das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden, so theile die größere durch die kleinere. Bleibt kein Rest, so ist die kleinere selbst das größte gemeinschaftliche Maß; bleibt aber ein Rest, so theile den Divisor durch diesen Rest. Geht nun die Division auf, so ist der Rest das größte gemeinschaftliche Maß; geht sie nicht auf, so theile den letzten Divisor durch diesen Rest, und fahre so fort, bis die Division aufgeht. Der Rest, durch welchen zuletzt getheilt wurde, ist alsdann das größte gemeinschaftliche Maß. Bleibt zuletzt 1 als Rest, so haben beide Zahlen kein anderes gemeinschaftliches Maß als 1, sind also Primzahlen unter sich.

Man findet auch das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen, wenn man beide Zahlen in ihre kleinsten Faktoren zerlegt und alle den beiden Zahlen gemeinschaftliche einfache Faktoren in ein Produkt vereinigt.

9) Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen muß eine Primzahl sein, wenn eine der beiden Zahlen selbst eine Primzahl ist. So ist das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 7 und 42 = 7.

10) Rechne nach, ob folgende Angaben richtig sind:

Das	größte	gemeinschaftliche	Maß	der Zahlen	105	und	133	ist	7.
"	"	"	"	"	14	"	33	"	1.
"	"	"	"	"	1072	"	5488	"	16.
"	"	"	"	"	30	"	216	"	6.

Anm. Soll das größte gemeinschaftliche Maß von 3 und mehr Zahlen gefunden werden; so suche man zuerst das größte gemeinschaftliche Maß für 2 dieser Zahlen, sodann für dieses größte gemeinschaftliche Maß und die dritte Zahl das größte gemeinschaftliche Maß, hierauf für dieses und die vierte der Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß u. s. w.

III. Stufe.

Die Lehre von den Brüchen.

§. 17.

a.

1) Bei den Quotienten können 2 Fälle stattfinden: entweder gibt es ein Vielfaches vom Divisor, das dem Dividendus gleich ist,

oder es gibt kein solches. Z. B. $6 : 2 = 3$; $2 : 3 = \frac{2}{3}$; $a : b = \frac{a}{b}$.

Im ersten Falle ist der Quotient eine der bisherigen Zahlen und man sagt von einem solchen Quotienten, sein Dividendus sei durch den Divisor theilbar, oder sein Divisor gehe im Dividendus auf; im zweiten läßt er sich durch keine solche ausdrücken. Die Operation kann dann bloß angedeutet werden, und wir bekommen eine ganz neue Form von Zahlen, die auch den Namen der gebrochenen Zahlen (im Gegensatze zu den bisherigen, welche ganze genannt werden) oder der eigentlichen Brüche führen, und welche ächte oder unächte Brüche heißen, je nachdem der Dividendus kleiner oder größer ist als der Divisor. Die Quotienten, denen sich die Gestalt einer ganzen Zahl geben läßt, werden auch noch uneigentliche Brüche (Scheinbrüche) genannt.

Jede Zahl, jede Größe, jedes Ding kann für sich betrachtet, als eine Einheit oder als ein Ganzes angesehen werden. Eine solche Einheit (nicht die Einheit an sich, die Grundeinheit, welche untheilbar ist und bleibt) kann in 2, 3, 4 u. s. w. gleiche oder ungleiche Theile getheilt gedacht werden. Wenn ich ein Ganzes in mehrere gleiche Theile zerlege, und das Verhältniß eines oder mehrerer dieser Theile zum Ganzen ausdrücke; so nennt man dies einen Bruch. Wenn ich einen Stock in 3 gleiche Theile zerlege, und einen Theil davon nehme, so habe ich noch keinen Bruch; sondern erst dann habe ich einen Bruch, wenn ich das Geschehene durch ein Zahlenverhältniß ausdrücke, indem ich das Verhältniß des genommenen Theiles zum Ganzen bezeichne.

Jedes Kind wird auf dieser Stufe schon gesehen haben, daß ein Apfel, ein Brod u. dergl. in 2, 3, 4 gleiche Theile getheilt wurden, ja wahrscheinlich hat es selbst schon Dinge in gleiche Theile getheilt, einen Stock in der Mitte entzwei gebrochen u. s. w.; es hat daher auch eine Vorstellung von der Theilung eines Ganzen in gleiche Theile. Dessenungeachtet sorge der Lehrer auch hier dafür, daß die Kinder im Anfange die Theilung von wirklichen Dingen in gleiche Theile anschauen. Hiezu können dünne, 1 Fuß lange Stäbe (Stöcke) benützt werden,

an welchen durch eingeschnittene Ringe die Länge der Theile bezeichnet ist, nachdem zuerst an mehreren Stöcken die Theilung (Brechung) wirklich vollzogen worden ist. Jedes Kind soll wenigstens 3 solche Stäbe haben; an dem ersten sei die Theilung in 2, 4 und 8 gleiche Theile, an dem zweiten in 3, 6 und 12, und an dem dritten in 5 und 10 gleiche Theile zu schauen. Zur leichtern Unterscheidung mache man die Ringe, welche die größern Theile bezeichnen, etwas breiter, als die übrigen. Denkt man sich z. B. einen Stab zuerst in 2, und dann jeden dieser 2 gleichen Theile wieder in 2 gleiche Theile getheilt; so wird der Ring, welcher die erste Theilung bezeichnet, etwas tiefer eingeschnitten, als die Ringe, welche die Theilung jedes Halben anzeigen.

Wurde die Theilung wirklicher Dinge so lange fortgesetzt, bis die Kinder eine klare Vorstellung der Theilung in gleiche Theile haben; so folgt die Darstellung, wozu man sich wagerechter Striche bedienen kann.

Anm. Die bei der Bruchlehre gebräuchlichen Veranschaulichungsmittel (Striche, Quadrate, Kreise) sollen nicht dazu dienen, die geistige Vorstellung oder innere Anschauung eines getheilten Ganzen erst zu erzeugen; sondern das Kind soll angehalten werden, das innerlich Angeschaute vermittelst der Striche darzustellen, also auch äußerlich anzuschauen und dann erst das so sinnlich und geistig Angeschaute auszusprechen. Also nicht der Lehrer, sondern der Schüler soll die getheilten Ganzen mit Strichen darstellen; der Lehrer darf nur bei großer Unbehülflichkeit des Schülers Winke geben und nachhelfen. Wer meint, dem Schüler durch lange Erklärungen und mit vielerlei Veranschaulichungsmitteln die Sache leicht und deutlich machen zu müssen, täuscht sich bitter; eben so irrig ist aber die Meinung, daß die Darstellung an und mit Strichen ganz entbehrt werden könne. Es wird dem Kinde nur Das recht klar, was es außer sich dar-, sich selbst gleichsam gegenüberstellt; eine längere Zeit fortgesetzte Darstellung an Strichen ist daher durchaus unerläßlich. Die Bezeichnung der Brüche mit Ziffern kann erst dann stattfinden, wenn das Angeschaute und an Strichen Dargestellte zur Erkenntniß gebracht worden ist.

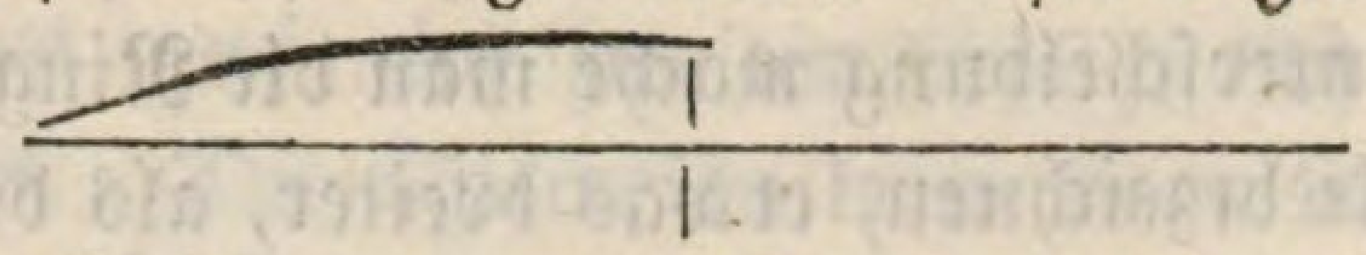
Theilt man ein Ganzes in 2 gleiche Theile; so nennt man einen Theil die Hälfte des Ganzen, ein Halbes oder ein Zweitel.

2) Wenn man ein Ganzes in 3, 4, 7 gleiche*) Theile zerlegt, so

*) Wir reden in der Lehre von den Brüchen immer nur von der Theilung in gleiche Theile.

nennt man einen Theil ein Drittel ($\frac{1}{3}$), ein Viertel ($\frac{1}{4}$), ein Siebentel ($\frac{1}{7}$). Ein Drittel heißt so viel, als der dritte Theil, ein Viertel so viel, als der vierte Theil von einem Ganzen.

3) Um ein Halbes an einem Striche darzustellen, ziehe ich einen wagerechten Strich, theile denselben in 2 gleiche Theile und bezeichne durch einen Bogen einen dieser 2 gleichen Theile.



Bei $\frac{1}{2}$ denke ich mir einen der 2 gleichen Theile eines Ganzen. Bei $\frac{1}{3}$ denke ich mir einen der 3 gleichen Theile eines Ganzen; um daher $\frac{1}{3}$ zu bekommen, theile ich ein Ganzes in 3 gleiche Theile und nehme einen Theil davon.

4) Um ein Zehntel zu bekommen, muß ich ein Ganzes in 10 gleiche Theile zerlegen; will ich das Ganze, so muß ich die 10 Theile, in welche ich dasselbe getheilt habe, wieder zusammen nehmen, denn jedes Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich. Man braucht also 10 Zehntel, um ein Ganzes zu bekommen.

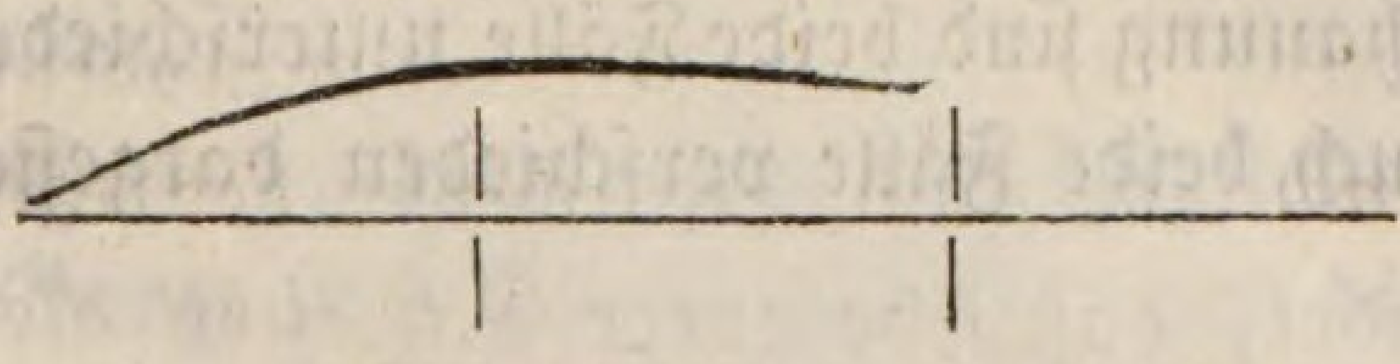
5) Um 2 Drittel zu bekommen, muß man 1) ein Ganzes in 3 gleiche Theile zerlegen, und 2) 2 Theile davon nehmen. Bei $\frac{3}{4}$ denke ich mir 1) ein Ganzes in 4 gleiche Theile getheilt und 2) 3 Theile davon genommen. Die 4 gleichen Theile, in welche ein Ganzes oder eine Einheit getheilt wurde, kann man als 4 neue untergeordnete Einheiten ansehen, die man ebenfalls zählen kann. $\frac{3}{4}$ ist also auch eine Zahl, die sich von den ganzen Zahlen dadurch unterscheidet, daß jede ihrer Einheiten als ein Theil einer andern Einheit angesehen wird.

6) Wenn man 1 Ganzes in 5 gleiche Theile theilt, und 4 Theile davon nimmt, so erhält man 4 Fünftel.

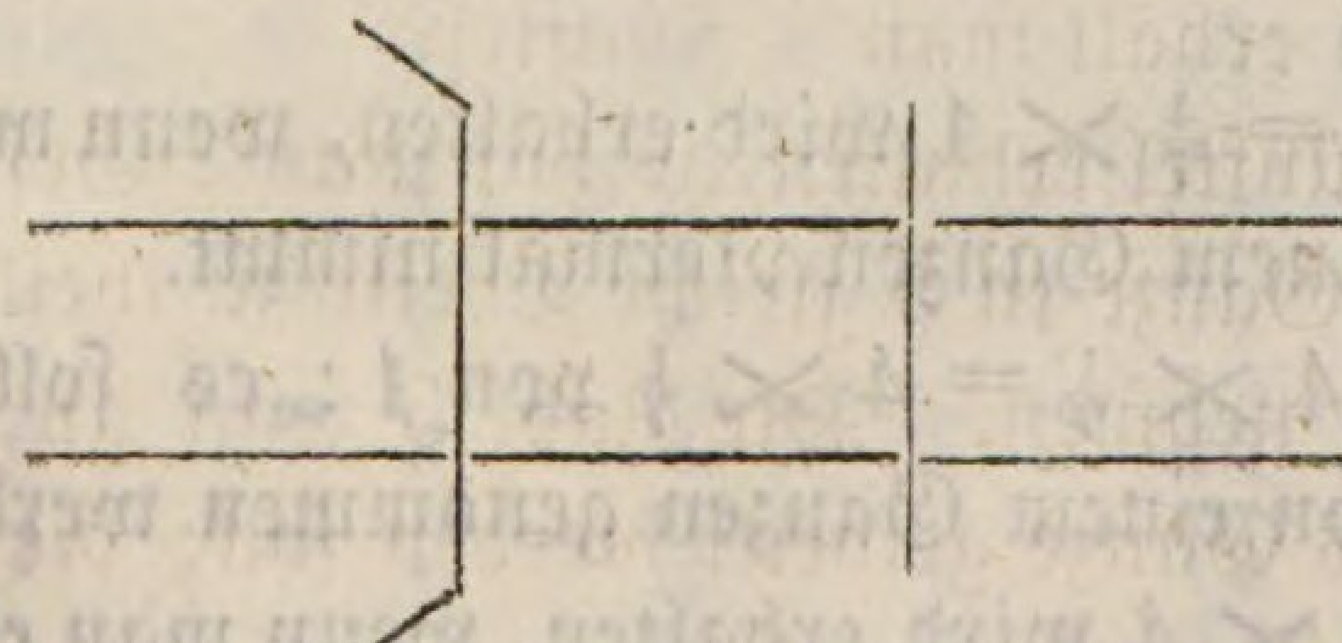
Will man 4 Fünftel erhalten, so hat man 2 Geschäfte vorzunehmen: 1) das Ganze in 5 gleiche Theile zu theilen, und 2) 4 Theile davon zu nehmen. Die Zahl 5 zeigt an, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt werden soll; die Zahl 4 zeigt an, wie viel Theile genommen werden sollen. Wenn ich der Zahl 5, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt werden soll oder getheilt worden ist, die Silbe tel anhänge (von 20 an, wird die Silbe stel angehängt), so erhalten die Theile ihren Namen. Die Zahl 4 zählt, die Zahl 5 mit der

Silbe tel angehängt, benennt die Theile; man heißt deßwegen 4 den Zähler, 5 den Nenner des Bruches. Bei jedem Bruche muß eine Zahl vorkommen, welche die Menge der Theile angibt, aus denen das Ganze besteht, und eine Zahl, welche die Menge der Theile angibt, die man nehmen soll. Es gehören also zu jedem Bruche 2 Vorstellungen: 1) in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, und 2) wie viele dieser gleichen Theile zu nehmen sind. Die Zahl, welche anzeigt, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, heißt der Nenner, weil sie den Namen angibt, welchen die Theile führen; die Zahl, welche anzeigt, wie viele dieser gleichen Theile genommen werden sollen, heißt der Zähler des Bruches. Jeder Bruch hat also einen Zähler und einen Nenner. Hat man eine solche Menge Theile, daß man sie nicht mehr mit Strichen darstellen kann, so wählt man die kürzere Darstellungsweise mit Ziffern. Es ist allgemein angenommen, die Ziffer des Zählers über und die Ziffer des Nenners unter einen Strich zu setzen; z. B. 4 Fünftel schreibt man $\frac{4}{5}$. Beim Aussprechen wird zuerst der Zähler und dann der Nenner genannt, obgleich man sich zuerst den Nenner denken muß, wenn man sich einen Bruch vorstellen will.

7) Wenn man 1 Ganzes in 3 gleiche Theile theilt, und 2 Theile davon nimmt; so hat man 2 Drittel.

 $= \frac{2}{3}$ von $1 = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$.

Theilt man 2 Ganze in 3 gleiche Theile und nimmt 1 Theil davon; so hat man 1 Drittel von 2.

 $= \frac{1}{3}$ von $2 = \frac{1}{3} \times 2$.

In beiden Fällen hat man in 3 gleiche Theile getheilt. Im ersten Falle hat man Ein Ganzes getheilt und 2 Theile genommen, im zweiten Falle hat man 2 Ganze getheilt und Einen Theil genommen. $\frac{2}{3}$ von 1 und $\frac{1}{3}$ von 2 sind in der Anschauung

und also auch in der Darstellung verschieden, dem Werthe nach aber gleich.

Im Anfange ist es von Wichtigkeit, diese 2 Anschauungen auseinander zu halten, und viele Beispiele von den Schülern darstellen zu lassen.

Wenn man 5 Ganze in 6 gleiche Theile theilt, und einen Theil davon nimmt, so erhält man $\frac{1}{6}$ von $5 = \frac{1}{6} \times 5$. Wenn man ein Ganzes in 6 gleiche Theile theilt, und 5 Theile davon nimmt, so erhält man $\frac{5}{6}$ von $1 = \frac{5}{6} \times 1 = \frac{5}{6}$. Dem Werthe nach ist $\frac{1}{6}$ von $5 = \frac{5}{6}$ von 1.

8) Wenn die Entvielfachungszahl kleiner, oder doch nicht genau mehrere Mal so groß, als der Entvielfacher ist; so wird oft der Quotient in der Bruchform dargestellt, indem man die Entvielfachungszahl zum Zähler und den Entvielfacher zum Nenner des Bruches macht. Ein solcher (formeller) Quotient heißt ein Bruch.

9) Den Bruch $\frac{8}{9} = \frac{8}{9}$ von 1 erhält man, wenn man 1 Ganzes in 9 gleiche Theile zerlegt und 8 Theile davon nimmt.

10) Bei $\frac{2}{3}$ von 1 denke ich mir 1 Ganzes in 3 gleiche Theile getheilt und 2 Theile davon genommen; bei $\frac{1}{3}$ von 2 denke ich mir 2 Ganze in 3 gleiche Theile getheilt und einen Theil davon genommen. Dem Werthe nach ist daher $\frac{2}{3}$ von $1 = \frac{1}{3}$ von 2; aber in der Anschauung sind beide Fälle unterschieden, und deßwegen werden auch beide Fälle verschieden dargestellt. Siehe §. 17, 7.

Dem Werthe nach ist $\frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times 1 = \frac{4}{7}$ von $1 = 4 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$ von $4 = \frac{1}{7} \times 4$; allein die Anschauung ist nicht bei allen Ausdrücken dieselbe.

$\frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ von $1 = \frac{4}{7} \times 1$ wird erhalten, wenn man den siebenten Theil von einem Ganzen viermal nimmt.

Ebenso heißt $4 \times \frac{1}{7} = 4 \times \frac{1}{7}$ von 1: es soll viermal der siebente Theil von einem Ganzen genommen werden.

$\frac{1}{7}$ von $4 = \frac{1}{7} \times 4$ wird erhalten, wenn man einmal den siebenten Theil von 4 Ganzen nimmt.

Anm. Obgleich $^4/_7$ dem Werthe nach $= {}^1/_7$ von 4; so halte man doch darauf, daß der Schüler diese verschiedenen Anschauungen im Anfange festhalte und gehe nicht weiter, bis er dieselben mit Fertigkeit darstellen kann.

11) 5 Mal der achte Theil von einem Ganzen ist = $\frac{5}{8}$ von 1; 1 Mal der achte Theil von 5 Ganzen ist = $\frac{1}{8}$ von 5. Dem Werthe nach sind beide Ausdrücke nicht verschieden; $\frac{5}{8}$ von 1 = $\frac{1}{8}$ von 5.

Man pflegt die Beziehung eines Bruches zum einfachen Ganzen (zu 1) nicht besonders auszusprechen; es ist daher auch nicht üblich, zu schreiben $\frac{5}{8}$ von 1, sondern man schreibt kurzweg $\frac{5}{8}$. Soll aber ein Bruch auf ein mehrfaches Ganze bezogen werden, so muß dies besonders angegeben sein; z. B. $\frac{5}{8}$ von 24, oder $\frac{2}{3}$ von 6. Gewöhnlich schreibt man $\times$ statt von; also $\frac{5}{8} \times 24$, $\frac{2}{3} \times 6$ statt $\frac{5}{8}$ von 24, $\frac{2}{3}$ von 6.

12) Die Hälfte von 2 ist so groß, als der dritte Theil von 3, oder als der vierte Theil von 4.

$\frac{2}{2} = \frac{1}{3}$ von $3 = \frac{1}{4} \times 4 = 1$.

Anm. Es wird wol kaum der Erinnerung bedürfen, daß die Aufgaben im „Rechenunterrichte" nur Muster sind, nach denen so lange ähnliche Aufgaben gebildet werden sollen, bis alle Schüler die Sache verstanden haben. Diese Bemerkung gilt von allen Aufgaben im Buche.

b.

1) Der Schüler hat bis jetzt das Wesen und die Bedeutung eines Bruches, seine Benennung und schriftliche Darstellung kennen gelernt; er soll nun auch Ganze in Bruchtheile verwandeln und umgekehrt, und dies auf Gegenstände des bürgerlichen Lebens anwenden.

1 ist = $\frac{5}{5}$; denn wenn von Fünfteln die Rede ist, so wurde das Ganze in 5 Theile getheilt, und diese 5 Theile zusammengenommen sind dem Ganzen gleich.

2) 1 Ganzes $= \frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{7}{7} = \frac{12}{12} = \frac{49}{49}$.
2 Ganze $= \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{24}{12} = \frac{98}{49}$.
3 „ $= \frac{9}{3} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7} = \frac{36}{12} = \frac{147}{49}$.
4 „ $= \frac{12}{3} = \frac{20}{5} = \frac{28}{7} = \frac{48}{12} = \frac{196}{49}$.
5 „ $= \frac{15}{3} = \frac{25}{5} = \frac{35}{7} = \frac{60}{12} = \frac{245}{49}$.
6 „ $= \frac{18}{3} = \frac{30}{5} = \frac{42}{7} = \frac{72}{12} = \frac{294}{49}$.
7 „ $= \frac{21}{3} = \frac{35}{5} = \frac{49}{7} = \frac{84}{12} = \frac{343}{49}$.
8 „ $= \frac{24}{3} = \frac{40}{5} = \frac{56}{7} = \frac{96}{12} = \frac{392}{49}$.
9 „ $= \frac{27}{3} = \frac{45}{5} = \frac{63}{7} = \frac{108}{12} = \frac{441}{49}$.
10 „ $= \frac{30}{3} = \frac{50}{5} = \frac{70}{7} = \frac{120}{12} = \frac{490}{49}$.
17 „ $= \frac{51}{3} = \frac{85}{5} = \frac{119}{7} = \frac{204}{12} = \frac{833}{49}$.

3) 97 Ganze $= \frac{291}{3} = \frac{679}{7} = \frac{970}{10} = \frac{1746}{18}$. $a = \frac{am}{m}$.

Man kann also jede ganze Zahl in der Form eines Bruches darstellen, wenn man sie mit dem gegebenen Nenner vervielfacht und diesem Produkte als Zähler den gegebenen Nenner zum Nenner gibt. $a = \frac{am}{m}$.

4) 35 fl. $= \frac{70}{2} = \frac{105}{3} = \frac{140}{4} = \frac{175}{5} = \frac{210}{6} = \frac{245}{7} = \frac{280}{8} = \frac{350}{10} = \frac{420}{12} = \frac{700}{20}$ fl.

5) 139 Ztnr. $= \frac{278}{2} = \frac{556}{4} = \frac{695}{5} = \frac{1112}{8} = \frac{1251}{9} = \frac{1529}{11}$ Ztnr.

6) Um uneigentliche und unächte Brüche in ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln, untersuche man, wie oft der Nenner des Bruchs in dem Zähler enthalten ist; der Quotient gibt die Anzahl der darin enthaltenen Ganzen an, und der Rest ist der Zähler des anzuhängenden Bruches, dessen Nenner gleich ist dem Nenner des uneigentlichen oder unächten Bruches.

$\frac{4}{4} = 1$; $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$; $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$; $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$; $\frac{8}{4} = 2$. $\frac{80}{12} = 6\frac{8}{12}$; $\frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}$. $\frac{cb + a}{b} = \frac{cb}{b} + \frac{a}{b} = c + \frac{a}{b}$.

Brüche, deren Zahlen 1 ist, z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{n}$ werden Stammbrüche genannt; die übrigen heißen Zweigbrüche.

7) Um gemischte Zahlen in unächte Brüche zu verwandeln, vervielfache die ganze Zahl mit dem Nenner des angehängten Bruches, zähle dessen Zähler zu dem Produkt und gebe der dadurch erhaltenen Zahl den Nenner des angehängten Bruches zum Nenner.

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$; $4\frac{1}{7} = \frac{29}{7}$; $6\frac{5}{8} = \frac{53}{8}$; $18\frac{2}{3} = \frac{56}{3}$; $47\frac{5}{9} = \frac{428}{9}$; $6\frac{1}{10} = \frac{61}{10}$; $7\frac{3}{20} = \frac{143}{20}$; $38\frac{4}{7} = \frac{270}{7}$; $86\frac{5}{11}$ Pfd. $= \frac{951}{11}$ Pfd.; $6\frac{1}{4}$ Loth $= \frac{25}{4}$ Loth; $37\frac{4}{5}$ Kzr. $= \frac{189}{5}$ Kzr.; $48\frac{7}{8}$ Ztnr. $= \frac{391}{8}$ Ztnr. $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$.

8) 1 fl. = 60 Kzr.; $\frac{1}{2}$ fl. $= \frac{60}{2}$ Kzr. = 30 Kzr. 1 fl. = 60 Kzr.; $\frac{1}{3}$ fl. = 20 Kzr.; $\frac{2}{3}$ fl. = 40 Kzr.; $\frac{3}{4}$ fl. = 45 Kzr.; $\frac{4}{5}$ fl. = 48 Kzr.; $\frac{5}{6}$ fl. = 50 Kzr.; $\frac{9}{10}$ fl. = 54 Kzr.; $\frac{5}{12}$ fl. = 25 Kzr.; $\frac{4}{15}$ fl. = 16 Kzr.; $\frac{3}{20}$ fl. = 9 Kzr.; $\frac{5}{30}$ fl. = 10 Kzr.

Anm. Der Schüler hat diese Aufgaben nicht nach einer Regel, sondern durch die Beziehung auf die Einheit zu lösen. Z. B. 1 fl. = 60 Kzr.; $^1/_{15}$ fl. = dem 15ten Theile von 60 Kzr. = 4 Kzr.; $^4/_{15}$ fl. = 4 × 4 Kzr. = 16 Kzr.

Die Regel für die Berechnung der vorstehenden Aufgaben wird erst im §. 23 aufgestellt.

9) $\frac{1}{2}$ Pfd. = 16 Loth; $\frac{3}{4}$ Pfd. = 24 Loth; $\frac{5}{8}$ Pfd. = 20 Loth; $\frac{7}{16}$ Pfd. = 14 Loth; $\frac{11}{32}$ Pfd. = 11 Loth.

10) $\frac{1}{8}$ Pfd. = 4 Loth = 16 Quentchen; $\frac{3}{4}$ Pfd. = 24 Loth = 96 Qtchn.; $\frac{5}{16}$ Pfd. = 10 Loth = 40 Qtchn.

11) $\frac{1}{2}$ Ztnr. = 50 Pfd.; $\frac{2}{5}$ Ztnr. = 40 Pfd.; $\frac{4}{5}$ Ztnr. = 80 Pfd.; $\frac{7}{10}$ Ztnr. = 70 Pfd.; $\frac{9}{10}$ Ztnr. = 90 Pfd.; $\frac{7}{25}$ Ztnr. = 28 Pfd.; $\frac{8}{50}$ Ztnr. = 16 Pfd.; $\frac{19}{50}$ Ztnr. = 38 Pfd.

12) $\frac{3}{5}$ Fdr. = 6 Ohm; $\frac{4}{5}$ Fdr. = 8 Ohm; $\frac{9}{10}$ Fdr. = 9 Ohm.

c.

1) Der 7te Theil von 42 = $\frac{1}{7}$ von 42 = $\frac{1}{7} \times 42$ ist 6.

2) 5 durch 6 getheilt = dem sechsten Theil von 5 = $\frac{1}{6}$ von 5 = $\frac{5}{6}$. Der Bruch $\frac{5}{6}$ bedeutet hier den so vielsten Theil, als der Nenner anzeigt, von so viel Ganzen, als der Zähler angibt. — Soll eine ganze Zahl durch eine größere ganze Zahl getheilt werden; so schreibe die erste Zahl als Zähler und die andere als Nenner an. Dasselbe Verfahren wird bei unbestimmten Zahlen angewendet. $a : b = \frac{a}{b}$.

3) 5 durch 9 getheilt ist = $\frac{5}{9}$. Ein Quotient, dessen Theilungszahl und Theiler ganze Zahlen sind, der aber nicht selbst eine ganze Zahl ist, heißt ein Bruch.

4) Die Zahl 12 ist 6 Mal so groß, als 2; die Zahl 14 ist um 6 Mal 2 größer, als 2. Soll ich die Zahl 2 sechsmal so groß machen (als sie ist), so erhalte ich 6×2; eben so wird jede andere Zahl 6 Mal so groß, als sie ist, wenn ich sie mit 6 vervielfache. Soll daher eine Zahl sechsmal so klein gemacht werden, so muß ich das entgegengesetzte Verfahren anwenden, d. h. ich muß durch 6 theilen; ist 12 sechsmal so klein zu machen, so erhalte ich $\frac{12}{6} = 2$. Um daher eine Zahl sechsmal so klein zu machen, muß man den sechsten Theil von ihr nehmen, d. h. sie durch 6 theilen; um eine Zahl 6 Mal so groß zu machen, muß man sie mit 6 vervielfachen. Wenn ich sage: 2 ist sechsmal so klein als 12; so heißt dies so viel, als 2 ist der sechste Theil von 12. Diese Ausdrücke müssen ganz geläufig werden.

Es ist oben bemerkt worden, daß 14 um 6 Mal 2 größer ist,

als 2; eben so ist 2 um 6 Mal 2 kleiner als 14. Es ist daher ein Unterschied zwischen 6 Mal so groß und 6 Mal größer, so wie zwischen 6 Mal so klein und 6 Mal kleiner.

Wenn ich 7 sechsmal so klein mache, d. h. wenn ich den sechsten Theil von 7 nehme, so erhalte ich $\frac{7}{6}$.

5) 1 Kzr. = $\frac{1}{60}$ fl.

6) 2 Kzr. = $\frac{2}{60}$ fl.

7) 59 Kzr. = $\frac{59}{60}$ fl.

Soll eine niedere Sorte in eine höhere verwandelt werden, so nimmt man die gegebene Zahl der niedern Sorte als Zähler und die Verwandlungszahl als Nenner eines Bruches an, und gibt diesem den Namen der höhern Sorte. Siehe Regel IX. §. 14.

8) 4 Loth = $\frac{4}{32}$ Pfd.; 21 Loth = $\frac{21}{32}$ Pfd.

9) 47 Pfd. = $\frac{47}{100}$ Ztnr.

10) 1 Kronenthaler = 2 fl. 42 Kzr.; $\frac{1}{2}$ Kronenth. = 1 fl. 21 Kzr.; $\frac{1}{3}$ Kronenth. = 54 Kzr.; $\frac{1}{6}$ Kronenth. = 27 Kzr.; $\frac{1}{10}$ Kronenth. = $16\frac{2}{10}$ Kzr.

11) 6 Stunden. 12) $\frac{7}{10}$ Schuh.

d.

1) Nimmt man eine Zahl zweimal, so erhält man das Doppelte oder Zweifache dieser Zahl; nimmt man eine Zahl dreimal, so erhält man das Dreifache dieser Zahl u. s. w. Jede Zahl ist die Hälfte von ihrem Zweifachen, ein Drittel von ihrem Dreifachen, ein Viertel von ihrem Vierfachen u. s. w. Will man daher wissen, von welcher Zahl eine gegebene Zahl die Hälfte ist, so darf man diese Zahl nur zweimal nehmen. 1 ist der halbe Theil vom Zweifachen, d. i. von $2 \times 1 = 2$.

2) 2 ist der sechste Theil vom Sechsfachen, d. i. von $6 \times 2 = 12$.

3) 2 ist $\frac{1}{4}$ von 8; $2 = \frac{1}{8} \times 16$; $2 = \frac{1}{9} \times 18$.

4) $4 = \frac{1}{2} \times 8 = \frac{1}{3} \times 12 = \frac{1}{7} \times 28 = \frac{1}{9} \times 36 = \frac{1}{10} \times 40 = \frac{1}{15} \times 60$.

5) $9 = \frac{1}{2} \times 18 = \frac{1}{3} \times 27 = \frac{1}{7} \times 63 = \frac{1}{8} \times 72 = \frac{1}{9} \times 81 = \frac{1}{30} \times 270$.

6) 2 ist der dritte Theil von 6; soll 2 zweimal der dritte Theil einer andern Zahl sein, so muß diese andere Zahl zweimal so klein sein, als 6; also ist $2 = \frac{2}{3} \times \frac{6}{2} = \frac{2}{3} \times 3$.

7) $2 = \frac{1}{4} \times 8$; 2 ist $\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{3}$; $2 = \frac{1}{9} \times 18$; $2 = \frac{7}{9} \times \frac{18}{7}$. 9 ist $= \frac{3}{4} \times 12$; $12 = \frac{4}{3} \times 9$; $12 = 4 \times 3$; $3 = \frac{1}{4} \times 12$.

8) 4 ist $\frac{2}{3}$ von 6; denn $2 = \frac{1}{3}$ von 6, also 2×2 oder $4 = 2 \times \frac{1}{3}$ von $6 = \frac{2}{3}$ von 6; $4 = \frac{3}{8} \times \frac{32}{3}$; $4 = \frac{4}{5} \times 5$; $4 = \frac{5}{6} \times \frac{24}{5}$; $4 = \frac{6}{7} \times \frac{28}{6}$; d. h. 4 ist 6 Mal der siebente Theil von $\frac{28}{6}$.

9) $9 = \frac{3}{7} \times \frac{63}{3} = \frac{5}{8} \times \frac{72}{5} = \frac{1}{11} \times 99 = \frac{7}{13} \times \frac{117}{7} = \frac{9}{15} \times \frac{135}{9} = \frac{9}{15} \times 15$.

10) $8 = \frac{2}{3} \times 12$.

11) Sobald 2 Zahlen mit einander verglichen werden sollen; so beachte man stets die in §. 16. 4 aufgestellten drei Fälle. Wenn die eine Zahl in der andern ohne Rest enthalten ist, so kann unmittelbar bestimmt werden, der wie vielste Theil eine Zahl von einer andern ist. Z. B. 2 ist in 14 siebenmal enthalten; also ist 2 ein Siebentel von 14. Eben so ist $1 = \frac{1}{14}$ von $14 = \frac{1}{14} \times 14$. Haben die 2 Zahlen einen gemeinschaftlichen Faktor; so gehe man auf diesen, und wenn er nicht leicht erkannt werden kann, auf 1 über. $2 = \frac{1}{5} \times 14$; also ist $2 \times 2 = 4 = \frac{2}{7} \times 14$, $6 = \frac{3}{7} \times 14$, $8 = \frac{4}{7} \times 14$, $10 = \frac{5}{7} \times 14$, $12 = \frac{6}{7} \times 14$.

Sind dagegen 2 Zahlen, z. B. 105 und 195, gegeben und man erkennt nicht schnell den gemeinschaftlichen Faktor; so gehe man auf 1 zurück. $1 = \frac{1}{195} \times 195$, $105 = \frac{105}{195} \times 195$.

Das Zurückgehen auf 1 findet jedes Mal statt, wenn die gegebenen Zahlen keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Z. B. 3 = wie vielmal 7? $1 = \frac{1}{7} \times 7$; $3 = 3 \times 1 = \frac{3}{7} \times 7$.

12) $3 = \frac{3}{14} \times 14$; $15 = \frac{15}{14} \times 14 = 1 \times 14$ und $\frac{1}{14} \times 14$; denn $1 = \frac{1}{14}$ von 14, also $15 \times 1 = 15 \times \frac{1}{14}$ von $14 = \frac{15}{14}$ von $14 = \frac{15}{14} \times 14$.

e.

1) 1 ist die Hälfte von $2 = \frac{1}{2}$ von $2 = \frac{1}{2} \times 2$.

Diese verschiedenen Bezeichnungen für einen und denselben Werth müssen fleißig geübt werden.

2) $1 = \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{4} \times 3 = \frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{5} \times 5$ u. s. w.

3) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2, $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, 3 u. s. w.

4) $3 = 3 \times 1 = \frac{3}{2} \times 2 = 1 \times 3 = \frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{5} \times 5 = \frac{3}{7} \times 7$.

5) Der vierte Theil von 12 ist 3; 3 ist $= \frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{5} \times 5 = \frac{1}{2} \times 6 = \frac{3}{7} \times 7 = \frac{3}{8} \times 8 = \frac{1}{3} \times 9 = \frac{3}{10} \times 10$.

6) Zwei Mal der siebente Theil von 42 ist 12; $12 = {}^{12}/_{13} \times 13 = {}^{6}/_{7} \times 14 = {}^{4}/_{5} \times 15 = {}^{3}/_{4} \times 16 = {}^{12}/_{17} \times 17 = {}^{2}/_{3} \times 18 = {}^{12}/_{19} \times 19 = {}^{3}/_{5} \times 20$.

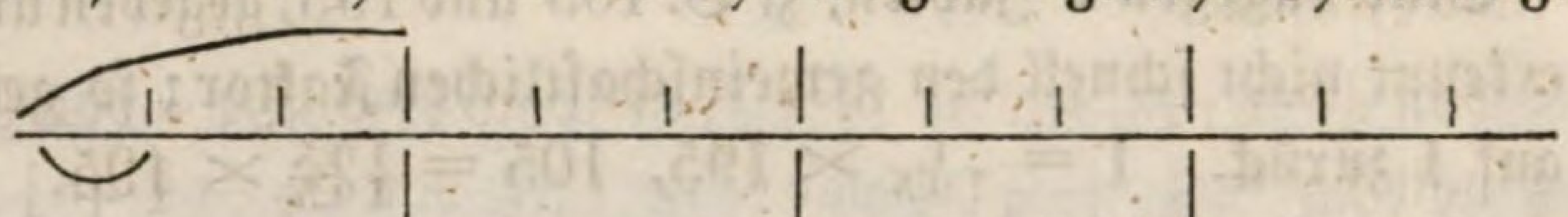
7) $7 \times {}^{1}/_{2}$ von $16 = 56 \times 1$.

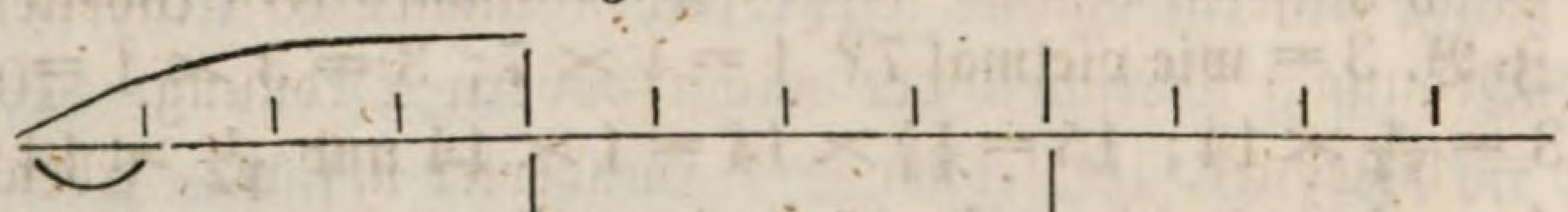
8) $6 = {}^{3}/_{16} \times 32$; denn $2 = {}^{1}/_{16} \times 32$, also ist 3×2 oder $6 = {}^{3}/_{16} \times 32$.

f.

1) Wenn man ein Ganzes in 2 gleiche Theile theilt, und jedes Halbe wieder in 2 gleiche Theile; so wird das Ganze in 4 gleiche Theile zerlegt, und einer dieser gleichen Theile ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ oder 1 Viertel.

2) $\frac{\frac{1}{2}}{2}$ d. h. ein Halbes getheilt durch 2, oder ein Halbes in 2 gleiche Theile getheilt, ist dem Werthe nach $= \frac{1}{4}$; allein in der Vorstellung können beide Brüche unterschieden werden. Bei $\frac{\frac{1}{2}}{2}$ denke ich mir zuerst ein Ganzes in 2 gleiche Theile getheilt und dann ein Halbes wieder in 2 gleiche Theile; bei $\frac{1}{4}$ ist es nicht nothwendig, das Ganze zuerst in 2 gleiche Theile getheilt zu denken, es wird hier nur die Theilung in 4 gleiche Theile angeschaut.

3)  $= \frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4}}{3}$.

 $= \frac{1}{4}$ von $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{4}$.

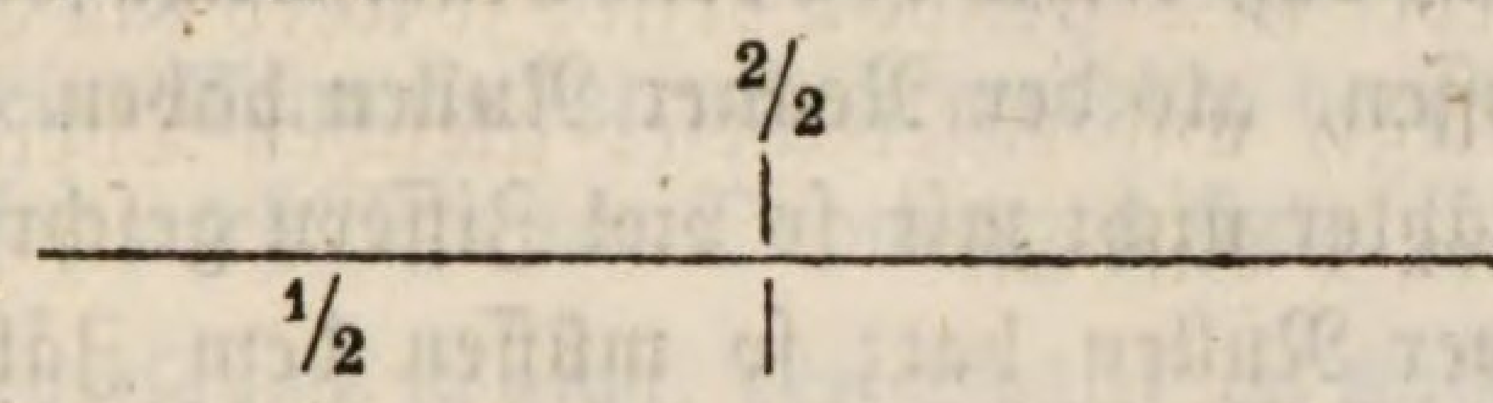
$\frac{\frac{1}{4}}{3}$ d. h. der dritte Theil von einem Viertel ist dem Werthe nach $= \frac{\frac{1}{3}}{4}$ d. h. dem vierten Theile von einem Drittel; denn in jedem Falle erhalte ich den zwölften Theil vom Ganzen. Allein die Anschauung ist nicht dieselbe; bei $\frac{\frac{1}{4}}{3}$ denke ich mir ein Ganzes zuerst in 4 und dann $\frac{1}{4}$ in drei gleiche Theile zerlegt; bei $\frac{\frac{1}{3}}{4}$ denke ich mir ein Ganzes zuerst in 3 gleiche Theile getheilt und dann den vierten Theil von einem Drittel genommen.

4) $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{5}}{6}$ ist dem Werth nach $= \frac{1}{5}$ von $\frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{6}}{5}$; denn sowol der sechste Theil von $\frac{1}{5}$, als der fünfte Theil von $\frac{1}{6}$ ist gleich dem dreißigsten Theil vom Ganzen.

5) Die Hälfte von $\frac{1}{2}$ ist in Beziehung auf das Ganze $\frac{1}{4}$; die Hälfte von $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{6}$ vom Ganzen; die Hälfte von $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{8}$ vom Ganzen u. s. w.

6) $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{2} = \frac{1}{2}$.

Anschaulich dargestellt



$= \frac{1}{2}$ von $\frac{2}{2} = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{7} = \frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{18} = \frac{1}{18}$.

Diese und die nachfolgenden Aufgaben sollen alle vom Schüler mit Strichen anschaulich deutlich gemacht werden. Der Lehrer glaube ja nicht, daß durch diese Darstellungen zu viel Zeit verloren werde; sie sind auf dieser Stufe schlechterdings nothwendig und die auf solche Darstellungen verwendete Zeit trägt reichliche Zinsen.

7) $\frac{1}{7}$ von $\frac{1}{2} = \frac{1}{14}$; $\frac{1}{7}$ von $\frac{1}{3} = \frac{1}{21}$; $\frac{1}{7}$ von $\frac{3}{4} = \frac{3}{28}$; $\frac{1}{7}$ von $\frac{5}{8} = \frac{5}{56}$.

8) $\frac{1}{2}$ von $1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ von $2 = 1$; $\frac{1}{2}$ von $2\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4}$ u. s. w.

9) $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{2} = \frac{1}{10}$; $\frac{1}{5}$ von $1\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$ u. s. w.

10) Nach unserm Zahlengesetze bilden immer 10 Einheiten einer Ordnung 1 Einheit der nächst höhern Ordnung. 10 Einer = 1 Zehner, 10 Zehner = 1 Hunderter u. s. w. Eben so sind 10 Zehntel = 1 Einer, 10 Hundertstel = 1 Zehntel, 10 Tausendstel = 1 Hundertstel, $\frac{10}{10000} = \frac{1}{1000}$, $\frac{10}{100000} = \frac{1}{10000}$ u. s. w. Die Bildung der Brüche, deren Nenner 10 oder ein Produkt aus lauter Faktoren von 10 (eine Potenz von 10) ist, gründet sich also auf das Zehnergesetz, wie die Bildung von ganzen Zahlen. Man heißt solche Brüche zehntheilige Brüche oder Decimalbrüche. Die bisher behandelten Brüche heißen im Gegensatze gemeine Brüche.

11) Da die zehntheiligen Brüche nach demselben Gesetze gebildet werden, wie die ganzen Zahlen; so wird auch bei ihnen nur die Anzahl der Einheiten durch Ziffern bezeichnet, und die Art der Einheiten (die Ordnung) aus der Stelle erkannt. (§. 9.)

Zu diesem Zwecke wird durch ein Komma, den Einerstrich oder Decimalstrich, die Stelle bezeichnet, wo die Ordnungen der ganzen Zahlen aufhören und die Ordnungen der zehntheiligen Brüche anfangen. Es stehen links des Einerstriches die Einer, rechts davon in der ersten Stelle die Zehntel, in der zweiten die Hundertstel, in der dritten die Tausendstel, in der vierten die Zehntausendstel u. s. w. Auf diese Weise werden nur die Zehner der zehntheiligen Brüche angeschrieben, wobei jedoch zu beachten, daß rechts von dem Einerstriche so viele Zahlzeichen stehen müssen, als der Nenner Nullen haben soll. Wenn daher ein Zähler nicht mit so viel Ziffern geschrieben wird, als sein Nenner Nullen hat; so müssen dem Zähler die entsprechende Anzahl Nullen vorgesetzt werden. Es soll z. B. der Bruch 815 Millionstel = $\frac{815}{1000000}$ geschrieben werden. Hier kommen im Nenner 6 Nullen vor; also müssen auch im Zähler 6 Zahlzeichen vorkommen. Da nun der Zähler 815 nur mit 3 Ziffern geschrieben wird, so müssen ihm 3 Nullen vorgesetzt werden.

$\frac{815}{1000000} = 0{,}000815.$

Eben so sind

$\frac{7}{10} = 0{,}7$

$\frac{75}{100} = 0{,}75$

$\frac{3}{1000} = 0{,}003$

$1\frac{5}{100} = \frac{105}{100} = 1{,}05$

$48\frac{713}{1000} = 48{,}713 = \frac{48713}{1000}$

$\frac{506}{100000} = 0{,}00506$

$6\frac{10507}{1000000} = 6{,}010507 = \frac{6010507}{1000000}.$

Es ist also jeder zehntheilige Bruch mit oder ohne Ganzen gleich einem gemeinen Bruche, dessen Zähler entsteht, wenn man den Einerstrich wegdenkt und die so entstehende ganze Zahl liest, dessen Nenner aber 1 mit so viel Nullen ist, als Decimalstellen vorhanden sind.

So ist $0{,}0013 = \frac{13}{10000}$

$45{,}07 = \frac{4507}{100} = 45\frac{7}{100}.$

12) Es kann auch jede ganze Zahl in Form eines Decimalbruchs geschrieben werden, wenn man ihr zur rechten den Einerstrich setzt und dann noch Nullen anhängt. Z. B. 17 = 17,0 = 17,00 17,000; denn es ist $17 = \frac{170}{10} = \frac{1700}{100} = \frac{17000}{1000}.$

13) $0{,}3714 = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{4}{10000}$.
$54{,}035 = 54 + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$.
$\frac{518}{100000} = \frac{500}{100000} + \frac{10}{100000} + \frac{8}{100000} = \frac{5}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{8}{100000} = 0{,}00518$.

So wie jede ganze Zahl, welche aus Einheiten mehrerer Ordnungen besteht, als eine Summe betrachtet werden kann, deren Posten die Einheiten dieser Ordnungen sind ($543 = 500 + 40 + 3 = 5$ H. + 3 Z. + 3 E.); so kann auch jeder Decimalbruch, welcher aus Einheiten mehrerer Ordnungen besteht, als eine Summe betrachtet werden, deren Posten die Einheiten dieser verschiedenen Ordnungen sind.

Anm. Der Lehrer versäume ja nicht, den Schüler im Anschreiben der zehntheiligen Brüche und im Umsetzen solcher Brüche in die Form gemeiner Brüche fleißig zu üben.

g.

1) $\frac{1}{2}$ ist größer als $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ ist größer als $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ ist größer als $\frac{1}{5}$ u. s. w.
Der Schüler hat sich diese Wahrheiten durch Darstellung an Strichen anschaulich deutlich zu machen.

2) $\frac{1}{3}$ ist größer als $\frac{1}{6}$; denn bei $\frac{1}{3}$ ist das Ganze nur in 3, bei $\frac{1}{6}$ aber in 6 gleiche Theile getheilt, und in je mehr Theile das Ganze getheilt wird, desto kleiner werden die Theile.

3) Von zwei oder mehreren Brüchen, deren Zähler 1 ist, hat derjenige Bruch den größern Werth, der den kleinern Nenner hat.

4) $\frac{1}{8}$ ist kleiner als $\frac{2}{8}$; $\frac{2}{8}$ ist kleiner als $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{8}$ ist kleiner als $\frac{4}{8}$ u. s. w.

5) Wenn der Zähler eines Bruches unverändert bleibt, der Nenner aber größer wird; so wird der Werth des Bruches kleiner. Z. B. $\frac{2}{3}$ ist größer als $\frac{2}{5}$.

6) Der Werth eines Bruches nimmt zu, wenn bei gleichbleibendem Nenner der Zähler größer wird.

7) Wenn mehrere Brüche gleiche Zähler, aber ungleiche Nenner haben; so hat derjenige Bruch den größern Werth, welcher den kleinsten Nenner hat.

8) Wenn mehrere Brüche gleiche Nenner, aber ungleiche Zähler haben; so hat derjenige Bruch den größern Werth, welcher den größern Zähler hat.

9) $\frac{6}{7}$ ist größer, als $\frac{5}{6}$; denn bei $\frac{6}{7}$ fehlt mir noch $\frac{1}{7}$ zum Ganzen, und bei $\frac{5}{6}$ ein Sechstel. Da nun $\frac{1}{6}$ größer ist, als $\frac{1}{7}$, so fehlt

zu $\frac{5}{6}$ mehr als zu $\frac{6}{7}$; also ist $\frac{5}{6}$ kleiner als $\frac{6}{7}$, und mithin ist $\frac{6}{7}$ größer als $\frac{5}{6}$.

10) $\frac{99}{100}$ ist größer als $\frac{9}{10}$; denn bei $\frac{99}{100}$ fehlt ein kleinerer Theil zum Ganzen als bei $\frac{9}{10}$.

11) Hinsichtlich des Werthes ist kein Unterschied zwichen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$; aber in der Vorstellung werden sie unterschieden.

12) Wenn Zähler und Nenner eines Bruches um gleichviel Einheiten zunehmen oder abnehmen; so wird der Werth des Bruches verändert.

$\frac{3}{4}$ ist nicht gleich $\frac{3+1}{4+1}$ oder $\frac{4}{5}$; eben so ist $\frac{3}{4}$ nicht gleich $\frac{3-1}{4-1}$ oder $\frac{2}{3}$.

13) Die Schüler machen an Strichen deutlich, daß $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ ist.

14) Die Schüler machen an Strichen deutlich, daß $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, $\frac{1}{7} = \frac{2}{14}$ ist.

h.

1) Der Werth eines Bruches wird weder allein durch den Zähler, noch allein durch den Nenner, sondern nur durch Zähler und Nenner bestimmt.

2) Brüche, bei denen Zähler und Nenner gleich sind, haben gleichen Werth.

3) Größere Brüche als $\frac{7}{8}$ sind: $\frac{7}{6}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{2}$; kleinere Brüche als $\frac{7}{8}$ sind: $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{7}{30}$.

4) Größere Brüche als $\frac{7}{9}$ sind: $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{14}{15}$; kleinere Brüche als $\frac{7}{9}$ sind: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{8}$.

5) Um 1 Ganzes oder mehrere Ganze in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln, vervielfache man die Zahl mit dem gegebenen Nenner, und gebe diesem Produkte als Zähler, den gegebenen Nenner zum Nenner.

6) Um aus unächten Brüchen die Ganzen zu ziehen, dividiere man den Zähler durch den Nenner des Bruches.

7) Um gemischte Zahlen einzurichten, vervielfache die ganze Zahl mit dem Nenner des angehängten Bruches, zähle dessen Zähler zu dem Produkt und gebe der dadurch erhaltenen Zahl den Nenner des angehängten Bruches zum Nenner.

8) Ein zehntheiliger Bruch hat die wesentlichen Eigenschaften eines gemeinen Bruches. Die zehntheiligen Brüche unterscheiden sich dadurch von den gemeinen Brüchen, daß bei Ersteren der

Nenner immer 10 oder eine Potenz (d. h. ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren) von 10 ist, dagegen bei Letzteren der Nenner jede ganze Zahl sein kann. Ferner wird bei den zehntheiligen Brüchen der Nenner aus der Anzahl der Stellen im Zähler erkannt, bei den gemeinen Brüchen dagegen muß der Nenner stets angeschrieben werden.

9) Mit jeder Stelle, welche der Einerstrich von der linken Hand zur rechten hin fortschreitet, erhält die Zahl einen zehnmal so großen Werth als vorher. Es wird dadurch jede Ziffer in die nächst höhere Stelle gesetzt und bezeichnet also das Zehnfache von vorher. So ist 0,03 das Zehnfache von 0,003; und 0,3 das Zehnfache von 0,03.

Soll daher ein zehntheiliger Bruch mit 10, 100, 1000 u. s. w. multipliziert werden, so rücke man den Decimalstrich um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen gegen die rechte Hand hin vor.

10) Wenn der Einerstrich von der rechten Hand zur linken um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen fortschreitet, so zeigt die Zahl den zehnten, hundertsten, tausendsten u. s. w. Theil des frühern Werthes an. Denn sobald der Einerstrich um eine Stelle zur Linken vorrückt, so wird dadurch jede Ziffer in die nächst niedere Stelle gesetzt und bezeichnet also ein Zehntel des früheren Werthes. So ist 0,007 der zehnte Theil von 0,07; der hundertste Theil von 0,7; der tausendste Theil von 7. Soll daher ein zehntheiliger Bruch durch 10, 100, 1000 u. s. w. getheilt werden, so rücke den Decimalstrich um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen gegen die linke Hand hin.

§. 18.

Verwandlung der Bruchform ohne Abänderung des Werthes der Brüche.

I. Das Erweitern der Brüche. (Vergrößerung der Bruchform.)

Beim Erweitern der Brüche kommen folgende Uebungen vor:

1) Der Schüler muß an wirklichen Dingen bestimmte Theile, in kleinere Theile ausgedrückt, anschauen und das Angeschaute durch ein Zahlenverhältniß (einen Bruch) bezeichnen.

2) Der Schüler lernt, daß einen Bruch in kleineren Theilen ausdrücken, den Bruch erweitern heißt.

3) Der Schüler ist zur Erkenntniß zu bringen, wie aus dem ersten Bruche der zweite von gleichem Werthe entsteht.

4) Die Regel beim Erweitern der Brüche wird zur Kenntniß und zur Anwendung gebracht.

5) Das Erweitern wird auf den Fall angewendet, daß ein Bruch in einen andern verwandelt werden soll.

Das Lehrverfahren ist folgendes:

Bei der ersten Uebung hat der Lehrer den Schüler anzuleiten, an wirklichen Dingen, z. B. an Stäben (§. 17. 1) bestimmte Theile anzuschauen, den Bruch anzugeben, welcher diese bestimmten Theile bezeichnet, jeden Theil in 2, oder 3, oder 4 u. s. w. gleiche Theile zu theilen, anzugeben, wie viele solcher kleineren Theile das Ganze enthält, wie viel davon auf die zuerst genommenen Theile gehen und wie der Bruch heißt, welcher das auf diese Weise Entstandene bezeichnet. Das an wirklichen Dingen Angeschaute wird sodann auch mit Strichen dargestellt.

Der Begriff des Erweiterns wird dem Schüler gegeben, sobald derselbe die einzelnen Uebungen mit Fertigkeit darstellen und das Dargestellte deutlich in Worten aussprechen kann.

Bei der dritten Uebung hat der Schüler anzugeben, in wie viel Theile jeder der zuerst genommenen Theile getheilt worden ist, wie vielmal so viel Theile demnach das Ganze enthält, mit welcher Zahl der Nenner des Bruches vervielfacht werden muß, um anzuzeigen, wie viele Theile das Ganze nun enthält, wie vielmal so viel Theile man nun genommen hat und mit welcher Zahl der Zähler des Bruches vervielfacht werden muß, um diese Theile anzuzeigen.

Die Regel beim Erweitern heißt:

XV. Wenn ein gemeiner Bruch erweitert werden soll, so vervielfache Zähler und Nenner desselben mit der Erweiterungszahl.

Zehntheilige Brüche werden erweitert durch Anhängung von Nullen.

Der Schüler wird diese Regel, wie jede andere (s. §. 10) leicht finden, wenn er angehalten wird, sein Verfahren in jedem einzelnen Falle in Worten auszusprechen. (S. §. 18. I. 8.)

Soll ein Bruch in einen andern verwandelt werden, dessen Nenner

gegeben ist, so hat der Schüler zuerst die Erweiterungszahl zu suchen, durch welche alsdann der Bruch erweitert wird.

Wenn z. B. $\frac{5}{7}$ in 21stel verwandelt werden sollen, so muß der Nenner 7 mit einer gewissen Zahl vervielfacht werden, um den Nenner 21 zu erhalten. Wird 7 vervielfacht, so ist 7 die Vervielfachungszahl; und erhält man durch das Vervielfachen 21, so ist 21 das Vielfache. Sind die Vervielfachungszahl und das Vielfache gegeben, so findet man den Vervielfacher, wenn man untersucht, wie oft die Vervielfachungszahl im Vielfachen enthalten ist. Auf diese Weise findet man die Zahl, mit der 7 vervielfacht werden muß, um 21 zu erhalten. Wird aber der Nenner mit 3 vervielfacht und der Werth des Bruches soll unverändert bleiben; so muß auch der Zähler des Bruches mit 3 vervielfacht, d. h. der Bruch muß durch 3 erweitert werden. (§. 18. I. 24.)

Oder man urtheile:

$$1 = \frac{21}{21}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{3}{21}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 3}{21} = \frac{15}{21}. \quad (§. 18. I. 18.)$$

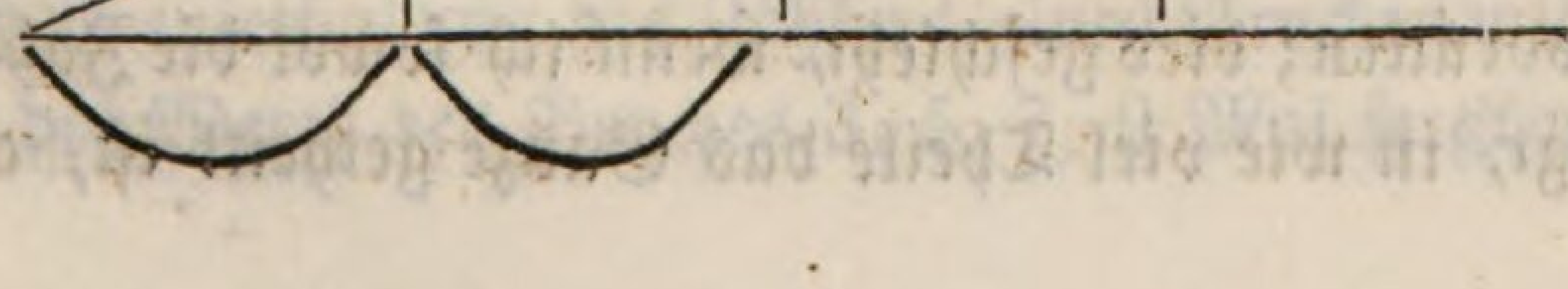
Die Regel heißt also:

XVI. Wenn ein Bruch in einen andern verwandelt werden soll, dessen Nenner bekannt ist; so messe oder theile diesen Nenner durch den Nenner des gegebenen Bruches und erweitere diesen Bruch durch die gefundene Zahl.

Beantwortung der Fragen und Aufgaben im Rechenunterrichte.

1) Wenn die Hälfte eines Ganzen in 2 gleiche Theile getheilt wird, so kommen 4 solche Theile auf das Ganze und 1 Theil ist $\frac{1}{4}$; auf das Halbe kommen 2 dieser gleichen Theile, also $\frac{2}{4}$.

Anm. Die Schüler dürfen beim Erweitern und beim Abkürzen der Brüche im Anfange erst dann Antwort geben, nachdem sie die Sache an wirklichen Dingen angeschaut haben. Man benütze hiezu die unter §. 17. 1 besprochenen Stäbe. Sollten auch manche Kinder ohne weitere Anschauung im Stande sein, die richtige Antwort zn geben; so ist es doch für die durch den Unterricht zu erstrebende Bildung wichtig, sie zu gewöhnen, nur das wirklich Angeschaute auszusprechen.

2) 

Um an einem Striche deutlich zu machen, daß $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, muß ich jedes Halbe in 2, also das Ganze in 4 gleiche Theile zerlegen. Wenn ich angebe, wie viele Viertel auf ein Halbes kommen, so drücke ich das Halbe in 2 Mal so kleinen Theilen aus.

Wird $\frac{1}{7}$ in 3 gleiche Theile getheilt, so kommen auf das Ganze 21 solcher Theile, und $\frac{1}{7}$ beträgt so viel, als $\frac{3}{21}$. Diese Theile sind 3 Mal so klein, als die vorigen.

3) $\frac{1}{3}$ in 2 Mal so kleinen Theilen ausgedrückt, ist $= \frac{2}{6}$.

4) Wenn man 2 Mal so kleine Theile nimmt, und der Werth nicht verändert werden soll; so muß man auch 2 Mal so viel Theile nehmen.

5) $\frac{3}{7}$ in 6 Mal so kleinen Theilen ausgedrückt, ist $= \frac{18}{42}$. Um $\frac{3}{7}$ in 6 Mal so kleinen Theilen auszudrücken, muß man jedes Siebentel in 6 gleiche Theile zerlegen. Einer dieser gleichen Theile ist $\frac{1}{42}$ vom Ganzen. Auf das Ganze kommen 6 Mal so viel Theile als vorhin, und man muß auch 6 Mal so viele Theile nehmen, um eben so viel zu haben, als man vorher bei $\frac{3}{7}$ hatte.

Um den sechsten Theil von $\frac{1}{7}$ in Bezug auf das Ganze benennen zu können, muß man jedes Siebentel in 6 gleiche Theile theilen oder doch wenigstens getheilt denken.

6) Um $\frac{4}{5}$ in 3 Mal so kleinen Theilen auszudrücken, muß ich jedes Fünftel in 3 gleiche Theile theilen; das Ganze enthält nun 3 $\times$ 5 oder 15 gleiche Theile. Ich muß aber auch 3 Mal so viel Theile nehmen, damit der Werth des Bruches nicht verändert wird; ich erhalte also $\frac{12}{15}$.

7) Um $\frac{1}{3}$ in 2 Mal so kleinen Theilen auszudrücken, hat man 1) das Ganze in 2 Mal so viel, d. i. in 6 Theile zu zerlegen, und 2) auch 2 Mal so viel, d. i. 2 Theile zu nehmen. — Will man dies durch ein Zahlenverhältniß ausdrücken; so muß sowol die Zahl, welche anzeigt, in wie viele Theile das Ganze getheilt ist, d. i. der Nenner, so wie auch die Zahl, welche anzeigt, wie viele Theile man vom Ganzen genommen hat, d. i. der Zähler, 2 Mal so groß gemacht werden, und dieses geschieht, wenn man den Nenner und den Zähler des Bruches $\frac{1}{3}$ mit 2 vervielfacht.

$\frac{3}{4}$ durch 2 erweitern, heißt $\frac{3}{4}$ in 2 Mal so kleinen Theilen ausdrücken; dies geschieht, wenn ich sowol die Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile das Ganze getheilt ist, als die Zahl,

welche anzeigt, wie viel Theile genommen werden sollen, mit 2 vervielfache. $\frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{6}{8}$. Soll ein Bruch durch 3 erweitert werden; so vervielfache man sowol den Nenner, als den Zähler des Bruches mit 3 u. s. w. Soll also der Bruch $\frac{a}{b}$ durch n erweitert werden, so erhält man $\frac{a \, . \, n}{b \, . \, n}$, oder, da Buchstaben multipliziert sind, wenn man sie ohne Zeichen neben einander schreibt $\frac{an}{bn}$.

8) Einen Bruch erweitern heißt: denselben in so vielmal so kleinen Theilen ausdrücken, als die Erweiterungszahl Einheiten enthält. So heißt z. B. $\frac{3}{4}$ durch 5 erweitern, $\frac{3}{4}$ in 5 Mal so kleinen Theilen ausdrücken. Wenn die Theile 5 Mal so klein werden sollen, so muß jeder Theil in 5 gleiche Theile getheilt werden. Das Ganze enthält alsdann auch 5 Mal so viele Theile als vorher. Die Zahl, welche anzeigt, wie viele gleiche Theile das Ganze enthält, d. i. der Nenner, muß also 5 Mal so groß werden, und ich mache den Nenner 5 Mal so groß, wenn ich ihn mit 5 vervielfache. Sind die Theile fünfmal so klein geworden, so muß ich, um eben so viel zu haben, als vorher, auch fünfmal so viel Theile nehmen; mithin muß die Zahl, welche anzeigt, wie viel Theile genommen werden, d. i. der Zähler, fünfmal so groß, also mit 5 vervielfacht werden. Ein Bruch wird also durch 5 erweitert, wenn man den Zähler und den Nenner des Bruches mit 5 vervielfacht.

9) Wenn ich den Nenner des Bruches $1/2$ mit 5 vervielfache, so wird der Werth des Bruches 5 Mal so klein.

10) Wenn ich den Zähler des Bruches $1/2$ mit 5 vervielfache, so wird der Werth des Bruches 5 Mal so groß.

11) Wenn ich den Zähler und den Nenner eines Bruches mit 5 vervielfache, so bleibt der Werth des Bruches unverändert.

12) Durch Vervielfachung des Nenners irgend eines Bruches mit 3, 5, 7, 9, wird der Werth eines Bruches durch 3, 5, 7, 9 getheilt.

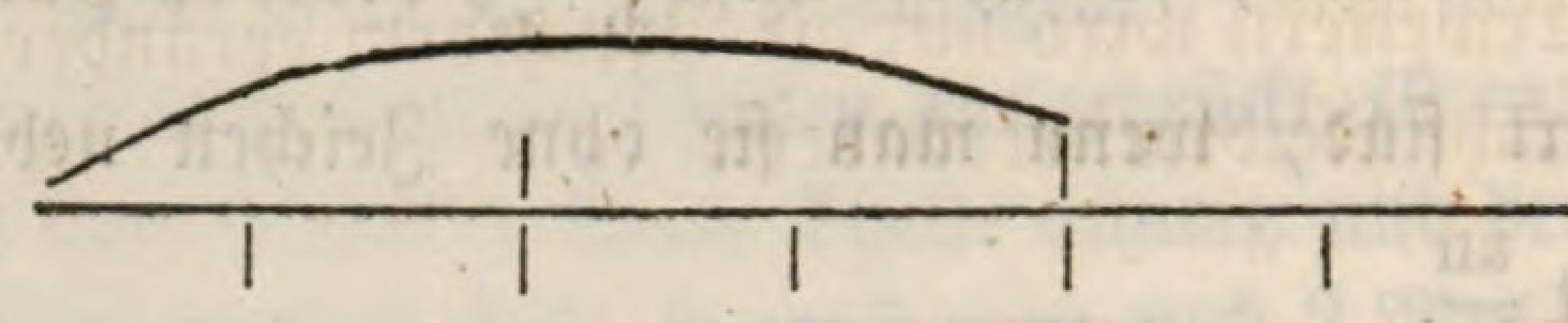
13) Durch Vervielfachung des Zählers eines Bruches mit 3, 5, 7, 9, wird der Werth des Bruches 3, 5, 7, 9 Mal so groß.

14) Wenn ein Bruch mit 3 erweitert werden soll, so muß sowol Zähler, als Nenner mit 3 vervielfacht werden.

15) 1/2 = 2/4 = 3/6 u. s. w.

Die Vervielfachung kann entweder wirklich ausgeführt oder nur angedeutet werden. Z. B.

$$\frac{3 \times 8}{6 \times 8} = \frac{24}{48}.$$

16) 

17) Wenn aus Fünfteln, 10tel, 15tel, 20stel, 25stel, 30stel entstehen sollen, so muß das Fünftel in 2, 3, 4, 5, 6 gleiche Theile getheilt werden.

18) 15/16 = 45/48 = 60/64 = 90/96. 15/16 ist = 45/48; denn 1 = 48/48, also 1/16 = dem 16ten Theile von 48/48 = 3/48, und 15/16 = 15 × 3/48 = 45/48.

19) 1/4 = 2/8 = 3/12 = 4/16 = 5/20 = 6/24 = 7/28 = 8/32 = 9/36 = 10/40. 1/5 = 2/10 = 3/15 = 4/20 u. s w. 5/6 = 10/12 = 15/18 = 20/24 u. s. w.

20) 36/63. 21) Wenn man 3/4 durch 5 erweitert, so muß jedes Viertel in 5 gleiche Theile zerlegt werden; auf das Ganze kommen 20 solche Theile, und 3/4 ist = 15/20.

22) 12/28. 23) Wenn man aus 5/8 einen Bruch bilden will, dessen Nenner 32 ist, so muß man den Zähler und den Nenner des Bruches 5/8 mit 4 vervielfachen.

24) Soll ich aus 5/8 einen Bruch bilden, dessen Nenner 32 ist; so muß ich den Nenner 8 mit einer gewissen Zahl vervielfachen, um den Nenner 32 zu erhalten. 8 ist also der eine Faktor, 32 das Produkt, und ich erhalte den andern Faktor, wenn ich das Produkt 32 durch den bekannten Faktor 8 dividiere.

25) 2/5 = 12/30; 3/10 = 9/30; 7/10 = 21/30; 11/15 = 22/30.

26) 1/2 = 30/60; 2/3 = 40/60; 3/4 = 45/60.

27) 2/5 = 36/90; 4/9 = 40/90; 13/15 = 78/90; 7/30 = 21/90; 1/3 = 40/120; 5/6 = 100/120; 7/8 = 105/120; 5/12 = 50/120; 1/2 = 210/420; 1/3 = 140/420; 2/5 = 168/420; 3/7 = 180/420; 4/15 = 112/420; 3/20 = 63/420; 1/30 = 14/420; 5/60 = 35/420.

28) 5/17 = 200/680; 2/5 = 4/10 = 0,4; 3/5 = 0,6; 4/5 = 0,8; 3/4 = 0,75; 7/20 = 0,35; 9/50 = 0,18; 7/40 = 0,175; 3/80 = 0,0375.

29) Wenn man mehrere gleichwerthige Brüche hat, die nur in der Form verschieden sind, so ist jeder einzelne dieser Brüche im Werthe dem Bruche gleich, welchen man erhält, wenn man die Summe der Zähler aller dieser Brüche theilt durch die Summe ihrer Nenner; denn Zähler und Nenner wachsen in gleichem Verhältnisse. $1/_2 = 2/_4 = 3/_6$; also ist auch $1/_2 = \frac{1+2+3}{2+4+6}$.

30) Beim Erweitern wird nur die Bruchform verändert, der Werth der Brüche bleibt unverändert.

II. Das Abkürzen der Brüche. (Verkleinerung der Bruchform.)

a.

Beim Abkürzen der Brüche kommen folgende Uebungen vor:

1) Der Schüler muß an wirklichen Dingen, z. B. an Stäben, bestimmte Theile, in größere Theile ausgedrückt, anschauen und das Angeschaute durch einen Bruch bezeichnen.

2) Der Schüler erfährt, daß einen Bruch in größeren Theilen ausdrücken, den Bruch abkürzen heißt.

3) Der Schüler ist zur Erkenntniß zu bringen, wie aus dem ersten Bruch der zweite entsteht.

4) Es wird folgende Regel zur Kenntniß und zur Anwendung gebracht:

XVII. **Wenn ein Bruch abgekürzt werden soll, so theile sowol den Zähler, als den Nenner des Bruches durch die Abkürzungszahl.**

Beantwortung der Fragen und Aufgaben.

1) Wenn man $6/_{12}$ in 2 Mal so großen Theilen ausdrücken will, so muß man immer 2 Theile zu Einem Theile zusammenfassen; alsdann enthält das Ganze 6 Theile, von denen man 3 genommen hat. Man hat also nun den Bruch $3/_6$.

2) $10/_{25} = 2/_5$. 3) $8/_{32} = 2/_8$. 4) Wenn man 4 Mal so große Theile nimmt; so muß man auch 4 Mal so wenig Theile nehmen, damit der Werth nicht verändert wird.

5) Um $12/_{18}$ in 6 Mal so großen Theilen auszudrücken, fasse ich immer 6 Theile zu Einem Theile zusammen. Das Ganze enthält nun 6 Mal so wenig Theile, und man darf auch nur 6 Mal so wenig Theile nehmen, um denselben Werth zu erhalten.

6) Um $^4/_6$ in 2 Mal so großen Theilen auszudrücken, muß man immer 2 Theile zusammennehmen zu Einem Theile. Dadurch kommen auf das Ganze 2 Mal so wenig Theile, als bei $^4/_6$. Will man nun durch einen Bruch ausdrücken, daß $^4/_6$ in 2 Mal so großen Theilen ausgedrückt worden ist; so muß die Zahl, welche anzeigt, wie viele Theile das Ganze enthält, d. i. der Nenner, 2 Mal so klein werden, als er bei $^4/_6$ ist, und man macht ihn 2 Mal so klein, indem man ihn durch 2 theilt. Ferner hat man nicht mehr 4 Theile, da man immer 2 Theile zu Einem Theile zusammengenommen hat; sondern 2 Mal so wenig Theile, als bei $^4/_6$. Daher muß auch die Zahl, welche anzeigt, wie viele Theile man genommen hat, d. i. der Zähler, 2 Mal so klein werden, als bei $^4/_6$, welches geschieht, indem man den Zähler 4 durch 2 theilt. Der Bruch $^4/_6$ wird also durch 2 abgekürzt, wenn man sowol den Zähler 4, als den Nenner 6 durch 2 theilt. Eben so ist $\frac{an}{bn}$ abgekürzt durch $n = \frac{a}{b}$.

7) Das Theilen wird beim Abkürzen der Brüche angewendet.

8) $^6/_9$ durch 3 abkürzen, heißt $^6/_9$ in 3 Mal so großen Theilen ausdrücken. Werden die Theile 3 Mal so groß; so muß die Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile das Ganze getheilt ist (der Nenner), 3 Mal so klein werden, welches geschieht, wenn man sie durch 3 theilt. Sind die Theile 3 Mal so groß geworden, so ist auch der Werth des Bruches 3 Mal so groß geworden; da aber der Werth des Bruches unverändert bleiben soll, muß ich nun 3 Mal so wenig Theile nehmen; folglich muß die Zahl, welche anzeigt, wie viel Theile genommen werden (der Zähler), 3 Mal so klein, also durch 3 getheilt werden. Ein Bruch wird also abgekürzt, wenn man sowol den Zähler, als den Nenner des Bruches durch die Abkürzungszahl theilt.

9) Wenn man den Zähler des Bruches $^6/_9$ durch 3 theilt, so wird der Werth des Bruches 3 Mal so klein.

10) Wenn man den Nenner des Bruches $^6/_9$ durch 3 theilt, so wird der Werth des Bruches 3 Mal so groß. Wird der Nenner eines Bruches 6 Mal so klein gemacht; so wird dadurch ausgedrückt, daß das Ganze 6 Mal so viele Theile enthält.

11) Wenn man den Zähler und den Nenner des Bruches $^6/_9$ durch 3 theilt, so bleibt der Werth des Bruches unverändert.

12) Die Brüche von $^1/_{60}$ bis $^{60}/_{60}$, in deren Zähler 2 ohne Rest enthalten ist, lassen sich durch 2 abkürzen.

13) Diejenigen Brüche von $^1/_{60}$ bis $^{60}/_{60}$ lassen sich durch 3 abkürzen, in deren Zähler 3 ohne Rest enthalten ist.

14) $^{12}/_{16}$, $^{20}/_{24}$, $^{28}/_{40}$, 0,32. 15) $^{10}/_{15}$, $^{12}/_{18}$, $^{14}/_{21}$, $^{24}/_{32}$, $^{18}/_{54}$, $^{20}/_{90}$, $^{22}/_{55}$, $^{36}/_{48}$. Dividiert man Zähler und Nenner eines Bruches durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß; so wird der neue Bruch dem gegebenen gleich sein, dabei aber Zähler und Nenner nicht mehr durch eine und dieselbe Zahl getheilt, der Bruch selbst also nicht mehr in kleineren Zahlen ausgedrückt werden können.

Anm. Das größte gemeinschaftliche Maß des Zählers und des Nenners eines Bruches wird gefunden, wie das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen überhaupt. Siehe II. Stufe §. 16 Zusätze.

16) Der Bruch $^{60}/_{360}$ ist abgekürzt worden durch 60, 30, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 2.

Wenn der Bruch $^{12}/_{15}$ in Fünftel verwandelt werden soll, so muß der Nenner 15 durch eine gewisse Zahl getheilt werden, um den Nenner 5 zu erhalten; mithin ist 15 die Theilungszahl und 5 der Theil. Sind die Theilungszahl und der Theil gegeben; so findet man den Theiler, wenn man die Theilungszahl durch den Theil mißt (§. 13. II. c. 2). 5 ist in 15 dreimal enthalten, also muß 15 durch 3 getheilt werden. Wird aber der Nenner durch 3 getheilt, so muß auch der Zähler durch 3 getheilt, also der Bruch durch 3 abgekürzt werden, wenn der Werth des Bruches nicht verwandelt werden soll.

17) $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{13}{14}$. 18) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$; $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$; $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; $\frac{6}{72} = \frac{1}{12}$; $\frac{7}{42} = \frac{1}{6}$; $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$; $\frac{8}{48} = \frac{1}{6}$; $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$; $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$; $\frac{11}{55} = \frac{1}{5}$; $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$; $\frac{18}{54} = \frac{1}{3}$; $\frac{20}{30}$ fl. $= \frac{2}{3}$ fl.; $\frac{24}{32}$ Pfd. $= \frac{3}{4}$ Pfd.; $\frac{12}{36}$ Ztnr. $= \frac{1}{3}$ Ztnr.; $\frac{32}{56}$ Lth. $= \frac{4}{7}$ Lth.; $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$; $\frac{48}{64}$ Kzr. $= \frac{3}{4}$ Kzr.; $\frac{63}{105} = \frac{3}{5}$; $\frac{65}{117} = \frac{5}{9}$; $\frac{81}{162} = \frac{1}{2}$; $\frac{216}{288} = \frac{3}{4}$; $\frac{75}{300} = \frac{1}{4}$; 0,01000 $= \frac{1}{100}$; $\frac{2799}{4860} = \frac{311}{540}$; $\frac{482480}{2268480} = \frac{6031}{28356}$; $\frac{2 \times 3 \times 6 \times 4 \times 8 \times 60}{5 \times 4 \times 9 \times 10} = \frac{192}{5}$.

Beim Abkürzen der Brüche dividiert man, so lange es möglich ist, Zähler und Nenner durch eine und dieselbe Zahl, indem man die Division immer mit kleinen Zahlen versucht.

Sollen Produkte abgekürzt werden, und es kommen in beiden Produkten gemeinschaftliche Faktoren vor, so lasse man diese

gegenseitig weg; z. B. statt $\frac{5 \times 7 \times 9 \times 13 \times 18}{5 \times 7 \times 9 \times 25}$ setze man $\frac{13 \times 18}{25}$, indem man die gemeinschaftlichen Faktoren 5, 7 und 9 im Zähler und Nenner durchstreicht.

19) Es ist nun auch die schriftliche Berechnung der unter §. 15 a. gegebenen Aufgaben mit Beobachtung der unter §. 15. c. 4 aufgestellten Regel bis zur Fertigkeit zu üben. Z. B.

1) 180 Batzen = wie viele fl.?

Auflös. 180 B. = $\frac{180}{15}$ fl. = $\frac{36}{3}$ fl. = 12 fl.

2) 1 Elle kostet 42 Kzr.; was kosten 97 Ellen?

Auflös. $\frac{97 \times 42}{60} = \frac{97 \times 7}{10} = 67{,}9$ fl.

b.

1) $\frac{1}{6}$. 2) $\frac{9}{50}$. 3) $\frac{3}{17}$. 4) Um die Hälfte, das Drittel, das Viertel u. s. w. einer Zahl zu erhalten, muß man die Zahl durch 2, 3, 4 u. s. w. theilen.

5) $\frac{12}{7}$ kann auf zweierlei Art 3 Mal so klein gemacht werden; mittelst Theilung des Zählers durch 3, oder durch Vervielfachung des Nenners mit 3. Im ersten Fall erhält man $\frac{4}{7}$, im zweiten $\frac{12}{21}$.

6) Wenn ein Bruch 3 Mal so klein gemacht werden soll, wendet man nur in dem Falle die Theilung des Zählers an, wenn 3 in dem Zähler ohne Rest enthalten ist, weil man sonst einen Doppelbruch bekäme.

7) $\frac{24}{51}$; $\frac{16}{51}$; $\frac{12}{51}$; $\frac{48}{255}$; $\frac{8}{51}$; $\frac{48}{357}$; $\frac{6}{51}$; $\frac{48}{561}$; $\frac{48}{969}$.

8) $\frac{30}{63}$; $\frac{20}{63}$; $\frac{12}{63}$; $\frac{5}{42}$; $\frac{5}{63}$.

9) $\frac{10}{7}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{30}{7}$; $\frac{120}{7}$.

10) Der Bruch $\frac{7}{8}$ kann auf zweierlei Art 2 Mal so groß gemacht werden; durch Vervielfachung des Zählers mit 2, und durch Theilung des Nenners mit 2. Im ersten Falle erhält man $\frac{14}{8}$, im zweiten Falle $\frac{7}{4}$.

11) Hinweglassung eines Vielfachers im Zähler ist so viel, als Theilung des Bruchwerthes durch diesen Vielfacher. Hinweglassung eines Vielfachers im Nenner ist so viel, als Vervielfachung des Bruchwerthes mit diesem Vielfacher. Der Werth eines mit Ziffern bezeichneten Bruches wird mit 2 vervielfacht, wenn man 2 als Vielfacher zum Zähler setzt, und durch 2 getheilt, wenn man 2 als Vielfacher zum Nenner setzt.

12) Den Werth annähernd bestimmt ist $\frac{5}{11} = \frac{1}{2}$, $\frac{6}{13} = \frac{1}{2}$, $\frac{7}{16} = \frac{1}{2}$, $\frac{9}{32} = \frac{1}{4}$, $\frac{5}{36} = \frac{1}{6}$, $\frac{8}{39} = \frac{1}{5}$, $\frac{19}{56} = \frac{1}{3}$, $\frac{49}{100} = \frac{1}{2}$, $\frac{50}{99} = \frac{1}{2}$, $\frac{12}{143} = \frac{1}{12}$, $\frac{89}{450} = \frac{2}{5}$.

c.

1) Die Form der Brüche kann auf zweierlei Art verändert werden: durch das Erweitern und durch das Abkürzen.

2) Durch Vervielfachung des Zählers wird der Werth des Bruches mit der vervielfachenden Zahl vervielfacht.

3) Durch Theilung des Zählers wird der Werth des Bruches durch die theilende Zahl getheilt.

4) Durch Vervielfachung des Nenners wird der Werth des Bruches durch die vervielfachende Zahl getheilt.

5) Durch Theilung des Nenners wird der Werth des Bruches durch die theilende Zahl vervielfacht.

6) Nullen, welche einem zehntheiligen Bruche angehängt werden, oder die zur Rechten eines zehntheiligen Bruches stehen und weggelassen werden, verändern den Werth des Decimalbruches nicht. So ist z. B. 0,3 = 0,30 = 0,300000; eben so ist 4,005000 = 4,00500 = 4,005.

III. Das Gleichnamigmachen der Brüche*)

1) Die Brüche haben entweder gleiche Nenner oder ungleiche Nenner; z. B. $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ oder $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$. Im ersten Falle sind es gleichnamige, im zweiten Falle ungleichnamige Brüche. Beim Gleichnamigmachen der Brüche kommen die in §. 16. Nr. 4 aufgestellten drei Fälle vor.

2) Um $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ in solche Brüche zu verwandeln, welche gleiche Nenner haben, muß ich eine Zahl suchen, in der die Nenner 2 und 3 aufgehen; 2 und 3 haben keinen gemeinschaftlichen Faktor, ich finde also diese Zahl, wenn ich 2 mit 3 vervielfache. $2 \times 3 = 6$; $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ müssen also nach Regel XVI. in Brüche verwandelt werden, deren Nenner 6 ist. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$; $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

---

*) Es dürfte gut sein, das Zerlegen der Zahlen in Faktoren und die Aufsuchung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (II. Stufe §. 16.) noch einmal vor dem Gleichnamigmachen zu üben, weil dieses ohne jenes nicht verstanden werden kann.

3) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.

4) Den gemeinschaftlichen Nenner für die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ findet man, wenn man die Nenner dieser Brüche vervielfacht.

5) $\frac{2}{7} = \frac{16}{56}$; $\frac{3}{8} = \frac{21}{56}$.

6) Sollen die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ gleichnamig gemacht werden, so ist es nicht nothwendig, die beiden Nenner mit einander zu vervielfachen, um den gemeinschaftlichen Nenner zu finden; denn der Nenner des ersten Bruches ist schon im Nenner des zweiten Bruches enthalten. Hier ist also der größte Nenner der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

7) $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$; $\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$.

8) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$; $\frac{3}{10} = \frac{3}{10}$.

9) Bei den zehntheiligen Brüchen ist immer der größte Nenner der kleinste gemeinschaftliche Nenner 0,7 = 0,70; 0,03 = 0,03.

10) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$.

11) Der größte Nenner 24 ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

12) $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$.

13) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{60}$.

14) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$.

15) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$. Die Nenner der beiden gegebenen Brüche haben den gemeinschaftlichen Vielfacher 2, welcher also nur ein Mal genommen werden darf. Man erhält daher $2 \times 2 \times 3 = 12$ als den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

Man findet auch den Hauptnenner, wenn man das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Nenner sucht, durch dasselbe einen der beiden Nenner dividiert und mit dem erhaltenen Quotienten den andern Nenner vervielfacht. Hat man z. B. die beiden Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{8}$, so ist das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Nenner = 2; $6 : 2 = 3$; $3 \times 8 = 24$. Mithin ist 24 der Hauptnenner. Eben so findet man 72 als Hauptnenner für die Brüche $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{18}$.

Bei den Brüchen $\frac{1}{12}$ und $\frac{7}{112}$ ist 4 das größte gemeinschaftliche Maß; $12 : 4 = 3$; $3 \times 112 = 336$ = dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

16) $\frac{4}{5}$ fl. = $\frac{96}{120}$ fl.; $\frac{5}{6}$ fl. = $\frac{100}{120}$ fl.; $\frac{7}{8}$ fl. = $\frac{105}{120}$ fl.; $\frac{9}{10}$ fl. = $\frac{108}{120}$ fl.

17) 120. 18) $\frac{630}{840}$; $\frac{672}{840}$; $\frac{720}{840}$; $\frac{525}{840}$; $\frac{770}{840}$.

19) a. $\frac{1155}{1386}$; $\frac{504}{1386}$; $\frac{616}{1386}$; $\frac{630}{1386}$.

b. $\frac{64}{128}$; $\frac{32}{128}$; $\frac{16}{128}$; $\frac{8}{128}$; $\frac{4}{128}$; $\frac{2}{128}$; $\frac{7}{128}$.

c. $\frac{40}{120}$; $\frac{30}{120}$; $\frac{24}{120}$; $\frac{100}{120}$; $\frac{105}{120}$; $\frac{108}{120}$; $\frac{110}{120}$.

d. $\frac{17280}{25920}$; $\frac{20160}{25920}$, $\frac{7200}{25920}$; $\frac{23760}{25920}$; $\frac{7560}{25920}$; $\frac{7290}{25920}$; $\frac{6885}{25920}$; $\frac{4800}{25920}$; $\frac{2016}{25920}$.

e. $\frac{20944}{188496}$; $\frac{26928}{188496}$; $\frac{117810}{188496}$; $\frac{119952}{188496}$; $\frac{35343}{188496}$; $\frac{44352}{188496}$.

f. $\frac{120}{1200}$; $\frac{180}{1200}$; $\frac{96}{1200}$; $\frac{140}{1200}$; $\frac{165}{1200}$.

g. 0,100000; 0,010000; 0,001000; 0,000100; 0,000010; 0,000001.

h. $\frac{27720}{55440}$; $\frac{18480}{55440}$; $\frac{41580}{55440}$; $\frac{46200}{55440}$; $\frac{47520}{55440}$; $\frac{48510}{55440}$; $\frac{49280}{55440}$; $\frac{49896}{55440}$; $\frac{50820}{55440}$; $\frac{25200}{55440}$; $\frac{11880}{55440}$; $\frac{17325}{55440}$; $\frac{19404}{55440}$; $\frac{1848}{55440}$.

i. 0,700; 3,120; 0,001.

20) Für das Gleichnamigmachen der Brüche ergeben sich folgende Regeln:

1. Wenn die kleineren Nenner im größten Nenner ohne Rest enthalten sind, so ist der größte Nenner der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Z. B. für die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{32}$ ist 32 der kleinste gemeinschaftliche Nenner.
2. Um Brüche gleichnamig zu machen, welche gemeinschaftliche Faktoren haben, zerlege man die Nenner in ihre kleinsten Faktoren, und nehme zu den Faktoren des ersten Nenners diejenigen Faktoren der übrigen Nenner, die im ersten nicht vorkommen. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner für die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{11}{12}$ ist 180.
3. Haben Brüche keinen gemeinschaftlichen Faktor, so findet man den gemeinschaftlichen Nenner, wenn man alle Nenner mit einander vervielfacht. Der gemeinschaftliche Nenner für die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{11}$ ist 231.
4. Zehntheilige Brüche werden gleichnamig gemacht durch Anhängung von Nullen. 0,3; 0,04; 0,003 = 0,300; 0,040; 0,003.

§. 19.

Das Zusammenzählen mit Brüchen.

Bei den 4 Rechnungsarten mit Brüchen sind keine neue Vorstellungen zu erzeugen; der Lehrer hat daher nur die Aufgaben zu geben und zu verfahren, wie §. 10 angegeben worden ist.

Die Regel für die Addition der Brüche heißt:

XVIII. Sollen Brüche zusammengezählt werden; so mache dieselben gleichnamig, wenn sie es nicht schon

sind, zähle die Zähler zusammen und gebe der Summe der Zähler den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner.

Zehntheilige Brüche werden zusammengezählt wie ganze Zahlen; nur hat man dafür zu sorgen, daß der Einerstrich an die gehörige Stelle gesetzt werde.

Die Regeln für die einzelnen Fälle finden sich unten.

Die schriftliche Form für die Addition der Brüche mag aus Nachstehendem ersehen werden:

a) (Hauptnenner 24)

$\frac{3}{4}$	6	$\frac{18}{24}$
$\frac{5}{6}$	4	$\frac{20}{24}$
$\frac{7}{8}$	3	$\frac{21}{24}$
$2\frac{11}{24}$		$\frac{59}{24} = 2\frac{11}{24}$

Oder b) (Hauptnenner 24)

$\frac{3}{4}$	6	18
$\frac{5}{6}$	4	20
$\frac{7}{8}$	3	21
$2\frac{11}{24}$		$\frac{59}{24}$

c) (Hauptnenner 72)

$3\frac{1}{2}$	36
$4\frac{3}{4}$	54
$8\frac{4}{9}$	32
$\frac{7}{18}$	28
$8\frac{7}{24}$	21
$14\frac{5}{72}$	5
$7\frac{5}{36}$	10
$46\frac{7}{12}$	$\frac{186}{72} = 2\frac{42}{72} = 2\frac{7}{12}$.

d)

4,513
86,274
9,090
0,900
7,403
108,180

Beantwortung der Fragen und Aufgaben:

A. Gleichnamige Brüche.

I. Mündlich.

1) 1. 2) 1; $1\frac{2}{9}$; 2; $2\frac{5}{7}$; 3. 3) 5; $10\frac{4}{5}$; $11\frac{1}{2}$; $20\frac{1}{7}$; $20\frac{1}{11}$.
4) $5\frac{4}{7}$; $5\frac{1}{2}$; $6\frac{2}{7}$; $7\frac{5}{8}$; $17\frac{8}{9}$.

5) $1\frac{1}{8}$. 6) $1\frac{10}{11}$.

7) Sollen gleichnamige Brüche addiert werden, so zählt man nur ihre Zähler zusammen; die Summe bildet den Zähler eines Bruches, dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner der Posten ist.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

8) Wenn gemischte Zahlen, deren Brüche gleichnamig sind, zusammengezählt werden sollen, so zähle zuerst die Brüche zusammen,

ziehe aus deren Summe die etwa enthaltenen Ganzen und füge diese zu der Summe der ganzen Zahlen.

II. Schriftlich.

1) 1. 2) $1\frac{1}{3}$. 3) $3\frac{3}{10}$ fl. 4) $3\frac{2}{7}$. 5) $28\frac{1}{8}$. 6) 2018 Pfd. 7) $12520\frac{1}{17}$. 8) 32 fl. 9) 67 Ohm.

B. Ungleichnamige Brüche.

I. Mündlich.

1) $\frac{5}{6}$. 2) So wenig man 3 Kreuzer und 4 Groschen, oder 6 Aepfel und 7 Birnen addieren kann, ohne sie vorher unter gleiche Benennung gebracht zu haben; eben so wenig kann man 3 Viertel und 4 Fünftel zusammenzählen, ehe diese Brüche gleichnamig gemacht sind.

3) $\frac{11}{30}$. 4) $\frac{11}{12}$; $\frac{29}{30}$; $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{6}$. 5) $1\frac{5}{6}$; $6\frac{3}{5}$; $4\frac{43}{56}$; $4\frac{11}{21}$. 6) $1\frac{1}{12}$; $\frac{11}{18}$; $\frac{19}{20}$. 7) $1\frac{11}{12}$; 0,111; $\frac{7}{8}$. 8) $1\frac{1}{6}$. 9) $2\frac{3}{10}$. 10) $2\frac{5}{12}$.

II. Schriftlich.

1) $1\frac{37}{56}$. 2) $\frac{16}{63}$; $1\frac{1}{12}$; $1\frac{14}{55}$; $1\frac{31}{42}$; $46\frac{209}{504}$; $42\frac{23}{24}$. 3) $3\frac{3}{10}$ fl. 4) $27\frac{47}{168}$ Pfd. 5) $1\frac{8}{9}$ fl. 6) $3146\frac{8749}{27720}$ fl. 7) $21\frac{19}{56}$ Pfd. 8) $33\frac{1}{35}$. 9) $61\frac{487}{504}$. 10) $3247\frac{1091}{2520}$ fl. 11) $162\frac{1}{8}$ Jahr. 12) 35,257.

13) Hat man ungleichnamige Brüche zusammenzuzählen, so verwandle man dieselben in gleichnamige und addiere die Zähler; der gefundene gemeinschaftliche Nenner ist auch der Nenner für die Summe.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Sollen gemischte Zahlen, deren Brüche ungleichnamig sind, addiert werden; so mache man die Brüche gleichnamig, zähle sie alsdann zusammen, ziehe die Ganzen heraus, und füge dieselben der Summe der ganzen Zahlen bei.

Zehntheilige Brüche werden zusammengezählt wie ganze Zahlen, mit gehöriger Beachtung des Einerstriches.

§. 20.

Das Abziehen mit Brüchen.

A. Gleichnamige Brüche.

I. Mündlich.

1) $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{17}$; $5\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{3}$. 2) 0; $3\frac{2}{7}$; $5\frac{8}{17}$. 3) $1\frac{4}{5}$; $1\frac{9}{10}$; $3\frac{5}{9}$. 4) $5\frac{1}{2}$; $15\frac{4}{7}$. 5) $8\frac{2}{3}$; $21\frac{1}{2}$; $132\frac{3}{8}$; $9\frac{6}{7}$. 6) $0,4 = \frac{2}{5}$. 7) $12\frac{6}{11}$; 11,33. 8) $6\frac{4}{5}$.

II. Schriftlich.

1) $\frac{1}{4}$; $9\frac{5}{7}$; $82\frac{2}{13}$; 18. 2) $588\frac{17}{47}$; $13\frac{1}{2}$; $21\frac{2}{9}$; $13\frac{7}{11}$. 3) $905\frac{9}{16}$; $56\frac{3}{4}$; 156,825; 94,08. 4) $47\frac{1}{2}$ Pfd. 5) $93\frac{3}{7}$.

6) Soll ein Bruch von einem gleichnamigen abgezogen werden, so zieht man den Zähler der Abzugszahl vom Zähler der Vollzahl ab, und gibt dem Reste dieselbe Benennung, die Vollzahl und Abzugszahl haben. Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, so verwandelt man eine Einheit der ganzen Zahl in einen Bruch, der denselben Namen hat, wie der abzuziehende, und zieht ab.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m};\quad a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}.$$

B. Ungleichnamige Brüche.

I. Mündlich.

1) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{9}{40}$. 2) $5\frac{17}{35}$; 3) $7\frac{17}{21}$; $15\frac{51}{56}$; $13\frac{41}{72}$; $2\frac{5}{12}$; 3,69. 4) $1\frac{7}{40}$; 16,71. 5) $\frac{1}{12}$. 6) $\frac{7}{12}$. 7) $1\frac{1}{6}$. 8) Das zweite Kalb wiegt $\frac{1}{12}$ Ztnr. mehr, als das erste. 9) $\frac{7}{8}$ Morgen.

10) Regel:

XIX. Sollen Brüche von einander abgezogen werden, so bringe man sie unter gleiche Benennung, wenn sie nicht schon gleichnamig sind, ziehe den Zähler der Abzugszahl von dem Zähler der Vollzahl ab und gebe dem Reste den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner. Sind im Zähler der Vollzahl weniger Einheiten als im Zähler der Abzugszahl; so verwandle 1 Ganzes in einen Bruch, der den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner hat, ziehe von dem Zähler dieses uneigentlichen Bruches den Zähler der Abzugszahl ab und zähle zu dem Reste den Zähler der Vollzahl.

Zehntheilige Brüche werden von einander abgezogen wie ganze Zahlen; nur hat man auf den Einerstrich Rücksicht zu nehmen.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

II. Schriftlich.

1) $\frac{19}{40}$; $4\frac{9}{28}$; $9\frac{44}{63}$; $92\frac{31}{44}$; 5,43. 2) $33\frac{23}{24}$ Ellen. 3) $35\frac{35}{36}$ Ellen.

4) $83\frac{49}{72}$ Pfd. 5) $7\frac{14}{15}$ fl. 6) $84\frac{3}{8}$ fl. 7) $17\frac{19}{24}$. 8) a. $68\frac{1}{12}$. b. $48\frac{5}{12}$. 9) $7\frac{79}{126}$. 10) $35\frac{1}{24}$ fl. 11) $1\frac{40}{63}$. 12) $9\frac{3}{20}$. 13) $\frac{14}{3615}$. 14) $130\frac{67}{120}$. 15) 301,0893.

Die schriftliche Form für die Subtraktion der Brüche ist folgende:

		63		
a)	$124\frac{5}{7}$	45	b)	1701,00300
	$86\frac{8}{9}$	56		98,78694
	$37\frac{52}{63}$	$\frac{52}{63}$		1602,21606

Anm. Man gewöhne die Schüler, bei jeder Aufgabe die Probe zu machen. S. §. 12. II. Anm.

§. 21.

Das Vervielfachen mit Brüchen.

1) $2 \times \frac{3}{4} = ?$

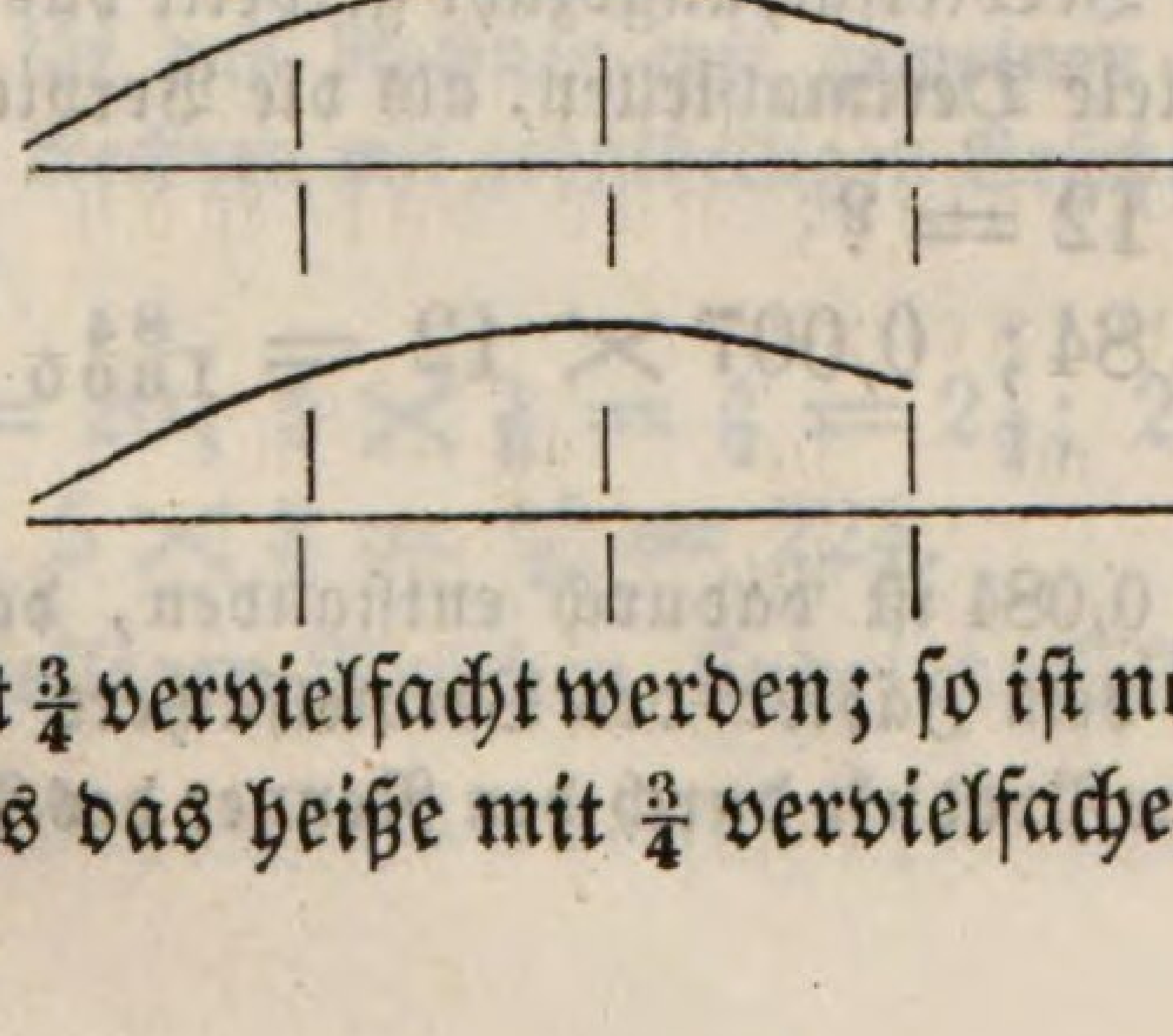
Auflös. a. 2×3 sind 6; $2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$.

Ich habe zuerst den Zähler der Vervielfachungszahl als Vervielfachungszahl angeschaut und die Aufgabe dadurch auf den Fall zurückgeführt: eine ganze Zahl mit einer ganzen Zahl zu vervielfachen. Da aber die Vervielfachungszahl keine ganze Zahl ist, sondern nur den so vielten Theil der ganzen Zahl beträgt, als der Nenner Einheiten enthält; so muß auch das Vielfache so vielmal so klein werden, als der Nenner der Vervielfachungszahl Einheiten enthält.

Anm. Schwachbefähigten Schülern kann man durch Fragen, wie die folgenden, nachhelfen: $2 \times 3 = ?$ 2×3 Kzr. = ? 2×3 Loth = ? 2×3 Zehner = ? 2×3 Viertel = ?

b. $2 \times \frac{3}{4}$ heißt $\frac{3}{4}$ soll 2 Mal so groß gemacht werden; man macht einen Bruch 2 Mal so groß, entweder durch Vervielfachung des Zählers mit 2 oder durch Theilung des Nenners mit 2. (§. 18. II. b. 10.) $2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

Man lasse die Aufgaben jedes Mal auch mit Strichen darstellen.



Soll 2 mit $\frac{3}{4}$ vervielfacht werden; so ist nothwendig zuerst festzustellen, was das heiße mit $\frac{3}{4}$ vervielfachen.

Mit $\frac{3}{4}$ vervielfachen, heißt mit dem vierten Theil von 3 vervielfachen, und dieses geschieht, wenn wir die Vervielfachungszahl zuerst 3 Mal nehmen und dann durch 4 theilen, oder wenn wir zuerst durch 4 theilen und den Quotienten 3 Mal nehmen. Ist also der Vervielfacher ein Bruch; so ist das Vervielfachen ein zusammengesetztes Geschäft: man muß nämlich mit dem Zähler des Vervielfachers vervielfachen und durch den Nenner desselben theilen. $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \times 2}{4} = \frac{3}{2}$.

Man gewöhne den Schüler, sich die Lösung eines neuen Rechnungsfalles dadurch zu erleichtern, daß er auf einen früher erkannten Fall zurückgeht und von diesem aus die Auflösung versucht. Ist dem Schüler z. B. zum ersten Mal die Aufgabe gegeben, 2 mit $\frac{3}{5}$ zu vervielfachen; so betrachte er den Zähler des Vervielfachers als Vervielfacher, vervielfache wie bei ganzen Zahlen ($3 \times 2 = 6$) und urtheile alsdann: der Vervielfacher ist aber nicht 3, sondern so vielmal so klein, als der Nenner des Vervielfachers anzeigt; folglich muß auch das Vielfache so vielmal so klein werden, als der Nenner des Vervielfachers anzeigt (§. 13. II. c. 11.). Mithin ist das Vielfache nicht 6, sondern $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

Auf dieselbe Weise hat der Schüler zu verfahren, wenn ein Decimalbruch mit einer ganzen Zahl, oder eine ganze Zahl mit einem Decimalbruche vervielfacht werden soll.

Z. B. $2 \times 0{,}03 = ?$

Auflös. $2 \times 3 = 6$. Die Vervielfachungszahl ist aber nicht 3, sondern eine hundert Mal so kleine Zahl als 3; folglich muß auch das Vielfache 100 Mal so klein werden, als 6 (§. 13. II. c. 13). Mithin erhält man nicht 6, sondern $\frac{6}{100} = 0{,}06$.

Das Vielfache ist entstanden, indem ich den Zähler der Vervielfachungszahl mit der ganzen Zahl vervielfacht und dieses Vielfache durch den Nenner der Vervielfachungszahl getheilt habe. Das Vielfache hat daher auch so viele Decimalstellen, als die Vervielfachungszahl.

Aufgabe: $0{,}007 \times 12 = ?$

Auflös. $7 \times 12 = 84$; $0{,}007 \times 12 = \frac{84}{1000} = 0{,}084$ (§. 13. II. c. 11).

Das Produkt 0,084 ist dadurch entstanden, daß ich die Vervielfachungszahl mit dem Zähler des Vervielfachers vervielfacht und das dadurch erhaltene Produkt durch den Nenner des Vervielfachers getheilt

habe. Das Vielfache enthält daher so viele Decimalstellen, als im Vervielfacher vorkommen.

Soll ein Decimalbruch mit 10, oder 100, oder 1000 u. s. f. multiplizirt werden, so rückt man den Einerstrich nur um 1, oder um 2, oder um 3 u. s. w. Stellen zur Rechten. Sind keine weiteren Decimalstellen mehr da, so werden Nullen angehängt, wie ganzen Zahlen (§. 17. h. 9).

Z. B. $10 \times 0{,}003 = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100} = 0{,}03$.
$100 \times 0{,}003 = 0{,}3$; $1000 \times 0{,}003 = 3$; $10000 \times 0{,}003 = 30$; $100000 \times 0{,}003 = 300$.

Läßt man den Schüler jedes Mal angeben, welche Zahlen ihm durch die Aufgabe bekannt waren, welche Zahl er gefunden und wie er diese Zahl gefunden hat; so wird er leicht die Regel finden:

XX. **Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl vervielfacht werden; so vervielfache den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl, und gebe dem Produkte den Nenner des Bruches zum Nenner. Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche vervielfacht werden; so vervielfache die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches, und theile dieses Produkt durch den Nenner desselben.**

Soll ein zehntheiliger Bruch mit einer ganzen Zahl, oder eine ganze Zahl mit einem zehntheiligen Bruche vervielfacht werden; so multiplizire, ohne auf den Einerstrich Rücksicht zu nehmen, und schneide im Produkte so viele Decimalstellen ab, als in beiden Faktoren vorkommen.

Anm. Der Schüler muß zur Einsicht geführt werden, daß bei den zehntheiligen Brüchen dieselben Regeln gelten, welche bei den gemeinen Brüchen Geltung haben. Man kann daher auch das Rechnen mit gemeinen Brüchen vollständig vorausgehen lassen und es alsdann dem Schüler überlassen, die für das Rechnen mit gemeinen Brüchen aufgestellten Regeln auf das Rechnen mit zehntheiligen Brüchen anzuwenden.

2) $5 \times 4\frac{1}{2} = ?$

Auflös. a. $5 \times 4 = 20$; $5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$; $20 + 2\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$.
b. $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; $5 \times \frac{9}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$.

Bei zehntheiligen Brüchen findet dasselbe Verfahren statt. So ist z. B.

$6 \times 4{,}07 = 6 \times \frac{407}{100} = \frac{6 \times 407}{100} = \frac{2442}{100} = 24{,}42.$

$5 \times 1{,}903 = 9{,}515.$

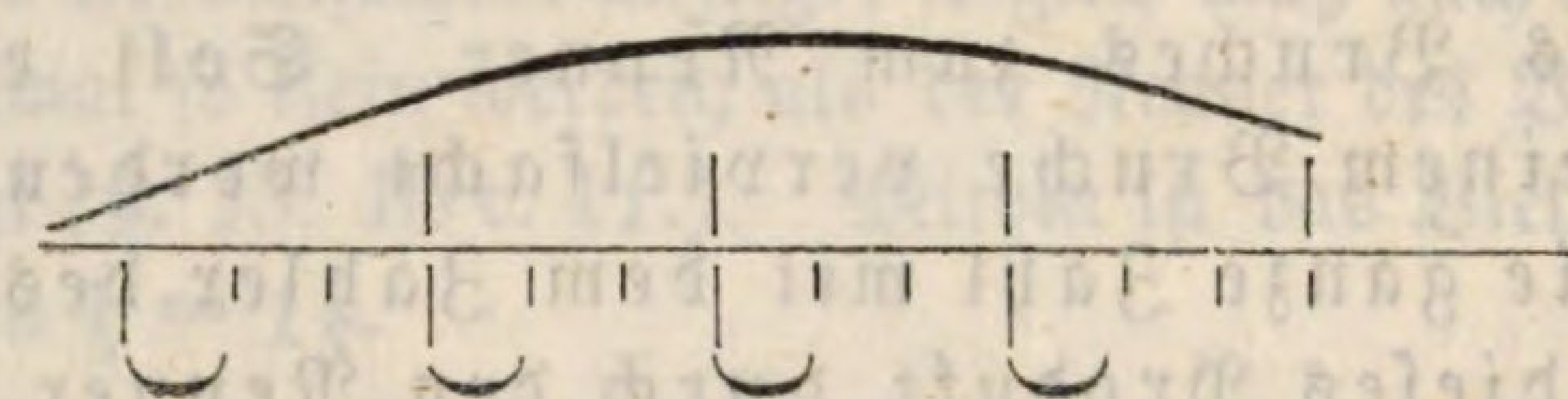
Regel: Soll eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl vervielfacht werden, so vervielfache die einzelnen Theile der gemischten Zahl und addiere die Produkte; oder verwandle die gemischte Zahl zuerst in einen unächten Bruch, und vervielfache denselben mit der ganzen Zahl.

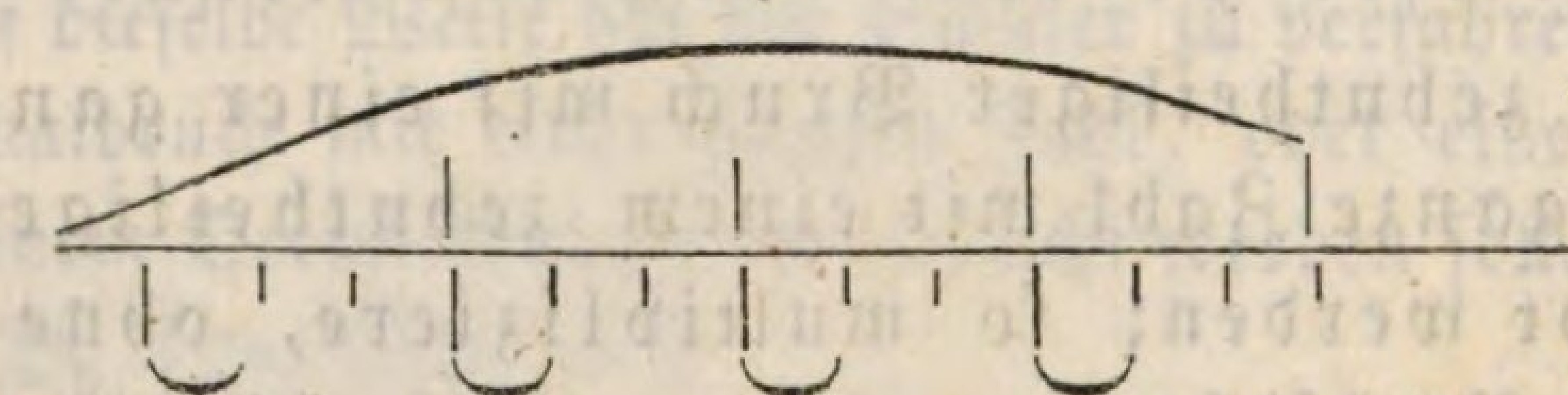
Wenn bei gemischten Zahlen der angehängte Bruch ein zehntheiliger Bruch ist; so vervielfache, ohne auf den Einerstrich Rücksicht zu nehmen, und schneide im Produkte so viele Decimalstellen ab, als im zehntheiligen Bruche vorkommen.

3) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = ?$

Auflös. $2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$; man soll $\frac{4}{5}$ aber nicht mit 2, sondern mit $\frac{2}{3}$, d. h. mit dem dritten Theil von 2 vervielfachen, also kann auch das Produkt nur gleich dem dritten Theil von $\frac{8}{5}$ sein (§. 13. II. c. 11), d. i. $\frac{8}{15}$; folglich ist $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

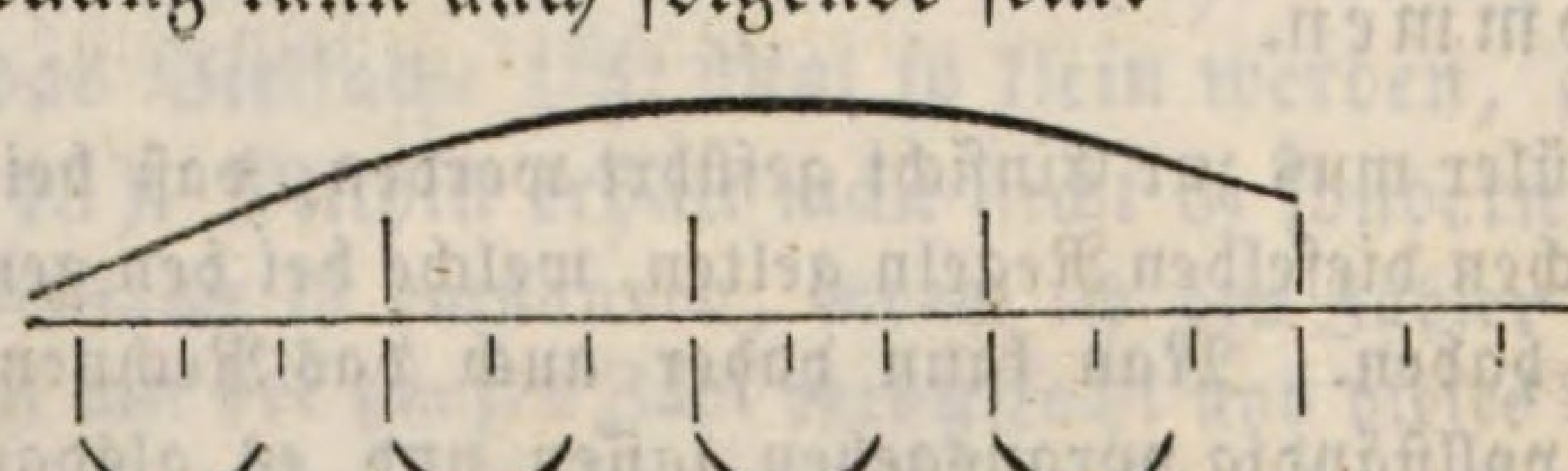
Mit Strichen dargestellt:





Die Bögen unterhalb des Striches zeigen das Vielfache an.

Die Darstellung kann auch folgende sein:



Daß der Vervielfacher nicht dargestellt wird, ist schon im §. 7 vorgekommen.

Zehntheilige Brüche werden vervielfacht, wie gemeine. So ist z. B. $0{,}3 \times 0{,}07 = 0{,}021$. Denn $0{,}3 \times 0{,}07 = \frac{3}{10} \times \frac{7}{100} = \frac{3 \times 7}{1000} = \frac{21}{1000} = 0{,}021$.

Der Zähler des Produktes entsteht dadurch, daß man die Faktoren multiplizirt, ohne auf den Einerstrich Rücksicht zu nehmen (§. 17. f. 11.). Das Produkt der Zähler wird durch das Produkt der Nen-

ner getheilt, indem man so viele Decimalstellen abschneidet, als in beiden Faktoren vorkommen.

XXI. Regel: Soll ein Bruch mit einem Bruch vervielfacht werden, so vervielfache man den Zähler des einen mit dem Zähler des andern, und den Nenner des einen mit dem Nenner des andern; das Produkt der Zähler gibt den Zähler und das Produkt der Nenner den Nenner des Bruches, welcher das Produkt der beiden Brüche ausdrückt. Oder: Um einen Bruch mit einem Bruch zu vervielfachen, theile das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner.

Um zehntheilige Brüche zu multiplizieren, denke die Decimalstriche hinweg, multipliziere die dadurch entstehenden ganzen Zahlen mit einander, und schneide im Produkte durch den Einerstrich so viele Decimalstellen ab, als in beiden Faktoren zusammengenommen vorkommen.

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}.$$

Anm. Manche Lehrer glauben in gewissen Fällen Alles gethan zu haben, wenn sie, ohne den Schüler den Zusammenhang mit den vorausgehenden Wahrheiten erkennen zu lassen, Sprechformeln tüchtig eingeübt haben, wie z. B. $^2/_3 \times {}^4/_5$ heißt so viel, als 2 Mal der dritte Theil von $^4/_5$; einmal der dritte Theil von $^4/_5$ ist $^4/_{15}$ u. s. w., oder: Um $^1/_2$ und $^1/_3$ unter gleiche Benennung zu bringen, theile ich ein Ganzes in 2×3 oder 6 gleiche Theile u. s. w. Solche vom Lehrer, gleich im Anfange und ohne vorangegangene Anschauung, gegebene Formeln sind für die Selbstthätigkeit des Schülers hemmende Fesseln, und daher durchaus verwerflich.

4) $\frac{2}{3} \times 8\frac{1}{3} = ?$

Auflös. a. $\frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$; $5\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = 5\frac{5}{9}$.

b. $8\frac{1}{3} = \frac{25}{3}$; $\frac{2}{3} \times \frac{25}{3} = \frac{2 \times 25}{3 \times 3} = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}$.

Dasselbe Verfahren findet bei Decimalbrüchen statt. So ist z. B. $0{,}9 \times 6{,}04 = 5{,}436$. Denn $0{,}9 \times 6{,}04 = \frac{9}{10} \times \frac{604}{100} = \frac{9 \times 604}{10 \times 100} = \frac{5436}{1000} = 5{,}436$.

Regel: Soll eine gemischte Zahl mit einem Bruche vervielfacht werden; so vervielfache man jeden Theil der gemischten Zahl einzeln mit dem Bruche, und addiere die Produkte; oder: man verwandle die

gemischte Zahl in einen unächten Bruch, und vervielfache dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

5) $5\frac{2}{3} \times 6\frac{2}{7} = ?$

Auflös. a. $5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$; $6\frac{2}{7} = \frac{44}{7}$; $\frac{17}{3} \times \frac{44}{7} = \frac{17 \times 44}{3 \times 7} = \frac{748}{21} = 35\frac{13}{21}$.

b. $5 \times 6 = 30$; $\frac{2}{3} \times 6 = 4$; $5 \times \frac{2}{7} = \frac{10}{7}$; $\frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$;

$30 + 4 + \frac{10}{7} + \frac{4}{21} = 34 + \frac{34}{21} = 35\frac{13}{21}$.

Wenn bei gemischten Zahlen die angehängten Brüche Decimalbrüche sind; so wird wie bei Auflösung a. verfahren. So ist $3{,}07 \times 5{,}134 = 15{,}76138$. Denn $3{,}07 \times 5{,}134 = \frac{307}{100} \times \frac{5134}{1000} = \frac{307 \times 5134}{100 \times 1000} = \frac{1576138}{100000} = 15{,}76138$.

Regel: Sollen gemischte Zahlen mit gemischten Zahlen vervielfacht werden, so richte man die gemischten Zahlen ein, und vervielfache dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; oder: man vervielfache jeden Theil der einen Zahl mit jedem Theil der andern Zahl, und addiere die Produkte. Sind die angehängten Brüche Decimalbrüche, so vervielfache, ohne auf den Einerstrich Rücksicht zu nehmen, und schneide im Produkte so viele Decimalstellen ab, als in beiden Faktoren zusammen genommen vorkommen.

6) $7 \times \frac{2}{7} = \frac{7 \times 2}{7} = 2$.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Regel: Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl vervielfacht werden, und der Nenner des Bruches ist gleich der ganzen Zahl; so ist das Produkt gleich dem Zähler des Bruches.

Soll ein Bruch mit einem Bruche vervielfacht werden, und der Nenner des einen Bruches ist gleich dem Zähler des andern Bruches; so können diese gleichen Zahlen gegen einander gestrichen werden. Der übrig bleibende Zähler wird zum Zähler, der übrig bleibende Nenner zum Nenner des Produkts.

Beantwortung der Aufgaben von Nr. 25 an.

I. Mündlich.

25) $1\frac{3}{4}$. 26) $6\frac{2}{5}$. 27) $2\frac{4}{5}$ fl. 28) $16\frac{1}{3}$. 29) 8 Jahre. 30) $\frac{1}{9}$.

31) $40\frac{1}{2}$. 32) $\frac{5}{9}$ fl. 33) $\frac{14}{27}$. 34) $\frac{35}{108}$.

35) Wenn ich die Zahl 6 mit $\frac{1}{2}$ vervielfache; so ist das Produkt = 3, also kleiner, als die Vervielfachungszahl. Wenn der Vervielfacher ein ächter Bruch ist; so ist das Vielfache immer kleiner, als die Vervielfachungszahl.

36) Man kann auch ungleichnamige Brüche vervielfachen; denn mit einem Bruche vervielfachen, heißt: mit dem Zähler vervielfachen und durch den Nenner theilen.

II. Schriftlich.

Bei der schriftlichen Berechnung werden die bei der mündlichen Berechnung gefundenen Regeln angewendet; z. B. $\frac{3}{4} \times \frac{7}{11} = \frac{3 \times 7}{4 \times 11} = \frac{21}{44}$.

Die Antworten zu den Aufgaben sind:
1) $2\frac{6}{7}$; $1\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{4}$; $\frac{4}{7}$; $1\frac{1}{5}$. 2) $13\frac{1}{3}$. 3) 58; $37\frac{5}{8}$; $88\frac{4}{7}$; 7; 103. 4) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{63}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{3}{13}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{6}{49}$. 5) $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$. 6) $\frac{1}{2}$. 7) $\frac{5}{28}$; $\frac{54}{77}$; $\frac{35}{117}$; $1\frac{11}{24}$; $2\frac{19}{28}$; $5\frac{13}{15}$; $8\frac{1}{15}$; $36\frac{2}{3}$; $67\frac{1}{32}$; $466677\frac{3}{88}$; 0,002; 67,8048. 8) Fritz hat $5\frac{3}{5}$ fl.; beide haben $6\frac{2}{5}$ fl. 9) 28. 10) $316\frac{1}{5}$. 11) 40 fl. 12) $\frac{15}{56}$ fl. 13) $\frac{72}{175}$. 14) $1\frac{81}{448}$. 15) $220\frac{25}{216}$. 16) $90463\frac{349}{1568}$. 17) $30583\frac{157}{245}$. 18) a. $12\frac{3}{5}$ fl. b. In 365 Tagen 657 fl.; wird das Jahr zu 52 Wochen gerechnet, so beträgt die jährliche Ausgabe $655\frac{1}{2}$ fl. 19) 123 fl. $11\frac{1}{4}$ Kzr. 20) $139\frac{7}{40}$ fl. 21) 23 fl. 45 Kzr. 22) a. $223\frac{1}{5}$ fl. b. $74\frac{2}{5}$ fl. 23) A = 125 fl. B = 25 fl. C = 50 fl. 24) 42 Fuß. Ueber die Berechnung des Flächeninhaltes siehe meine „Raumformen- und Raumgrößenlehre"*), §. 13. 25) $116\frac{1}{4}$ fl. 26) $2104\frac{3}{8}$ Schuh. Ueber die Berechnung des Körperinhaltes (Kubikinhaltes) siehe meine „Raumformen- und Raumgrößenlehre", §. 19. 27) $1625\frac{15}{56}$. 28) $31\frac{1}{4}$ Kubikfuß.

§. 22.

Das Messen und Theilen mit Brüchen.

I. Mündlich.

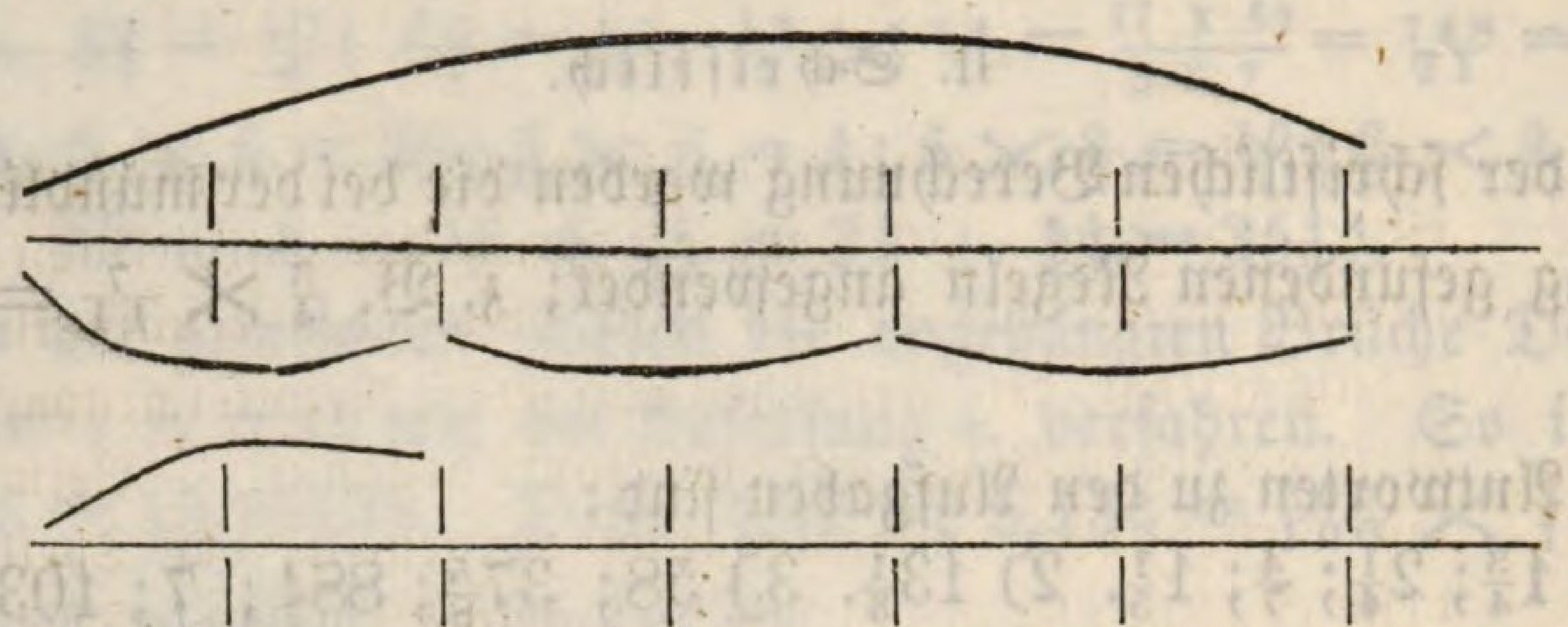
1) $\frac{2}{7}$ ist in $\frac{6}{7}$ wie oft enthalten?

Auflös. a. 2 ist in 6 so oft enthalten, als 2 fl. in 6 fl., als 2 Pfd. in 6 Pfd., als 2 Siebentel in 6 Siebentel; also sind 2 Siebentel in 6 Siebentel 3 Mal enthalten.

---

*) Die Raumformen- und Raumgrößenlehre in Verbindung mit dem Zeichnungs-Unterrichte. Zum Gebrauche für Lehrer an Volks- und Gewerbschulen. Von Karl Gruber. II. vermehrte Auflage. Mannheim 1850. Verlag von Fr. Bassermann.

b. Untersuchen, wie oft $\frac{2}{7}$ in $\frac{6}{7}$ enthalten sind, heißt untersuchen, wie vielmal man da $\frac{2}{7}$ hinwegnehmen kann, wo $\frac{6}{7}$ sind. Anschaulich dargestellt:



Die obere Linie stellt die Entvielfachungszahl, die untere den Entvielfacher vor.

c. $6 : 2 = 3$. Werden die zu messende Zahl und das Maß durch 7 getheilt; so bleibt der Quotient unverändert (§. 13. II. c. 15.); also ist auch $\frac{6}{7} : \frac{2}{7} = 3$.

d. $\frac{6}{7} : \frac{2}{7} = ?$ Werden die zu messende Zahl und das Maß mit einer und derselben Zahl vervielfacht, so bleibt der Quotient derselbe (§. 13. II. c. 14). Dadurch wird die Aufgabe auf den Fall zurückgeführt: eine ganze Zahl durch eine ganze Zahl zu messen; denn $\frac{6}{7} \times 7 : \frac{2}{7} \times 7 = 6 : 2 = 3$.

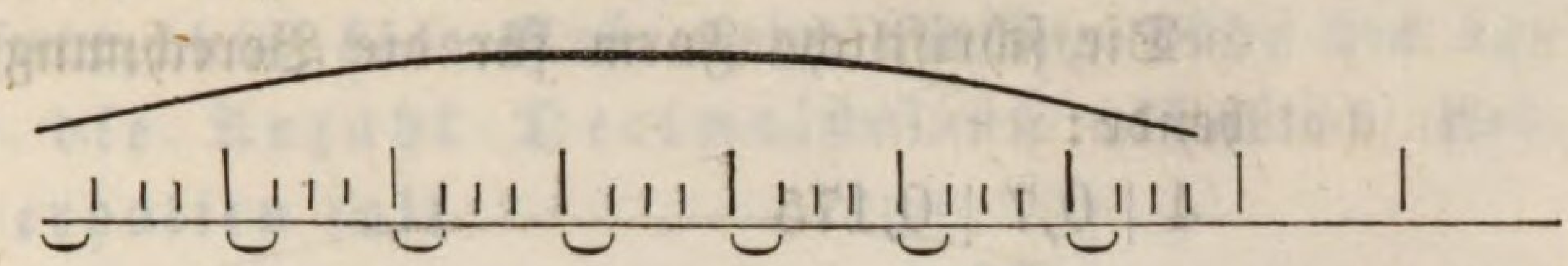
Eben so ist $0{,}8 : 0{,}4 = 2$; $0{,}14 : 0{,}04 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

XXII. Regel: Soll ein Bruch durch einen gleichnamigen gemessen werden; so ist die Zahl, welche angibt, wie oft der Zähler des Entvielfachers im Zähler der Entvielfachungszahl enthalten ist, der Quotient der beiden Brüche.

2) Dividiere $\frac{7}{9}$ durch 4!

Auflös. a. $\frac{7}{9}$ wird durch 4 getheilt, wenn ich $\frac{7}{9}$ in 4 gleiche Theile zerlege und einen von diesen 4 Theilen nehme. Um dies zu bewerkstelligen, zerlege ich jedes Neuntel in 4 gleiche Theile und nehme von jedem Neuntel einmal den vierten Theil. Betrachte ich nun den 4ten Theil von $\frac{1}{9}$ in Bezug auf das Ganze; so finde ich, daß er der 36ste Theil vom Ganzen ist. Ist nun der 4te Theil von 1 Ganzen $\frac{1}{36}$; so ist der 4te Theil von $\frac{7}{9} = \frac{7}{36}$.

Anschaulich dargestellt:



Die Aufgabe verlangt das Entvielfachen eines Bruches durch eine ganze Zahl. Ich habe die Form des Entvielfachens angewendet, welche das Theilen heißt, habe jedes Neuntel in 4 gleiche Theile zerlegt, den 4ten Theil von jedem Neuntel genommen, und diese Theile in Bezug auf das Ganze benannt. — Beim Darstellen wird nur die Theilungszahl dargestellt, der Theiler nicht; denn er zeigt nur an, in wie viel gleiche Theile die Theilungszahl zerlegt worden ist. Der Theiler wird nicht dargestellt, weil der Theiler beim Vervielfachen der Vervielfacher war, und der Vervielfacher nie dargestellt wird.

b. $4 = \frac{36}{9}$; $\frac{36}{9}$ sind in $\frac{7}{9}$ so oft enthalten, als 36 in 7 $= \frac{36}{7}$.

Soll die Aufgabe durch das Messen gelöst werden; so muß die ganze Zahl 4 ebenfalls in Neuntel verwandelt werden, da beim Messen Entvielfacher und Entvielfachungszahl gleichnamig sein müssen. (§. 14. IV.)

c. $\frac{7}{9}$ durch 4 theilen, heißt $\frac{7}{9}$ viermal so klein machen.

Man macht aber einen Bruch viermal so klein, wenn man den Nenner desselben mit 4 vervielfacht (§. 18); folglich wird $\frac{7}{9}$ durch 4 getheilt, wenn ich den Nenner des Bruches $\frac{7}{9}$ mit 4 vervielfache. $\frac{7}{4 \times 9} = \frac{7}{36}$.

d. $7 : 4 = \frac{7}{4}$. Wenn bei unverändertem Theiler die Theilungszahl 9 Mal so klein wird, als sie vorher war; so wird auch der Theil 9 Mal so klein (§. 13. II. c. 13). Also ist $\frac{7}{9} : 4 = \frac{7}{9 \times 4} = \frac{7}{36}$.

Aufgabe: 0,7 : 4 = ?.

Auflös. a. Da in der Theilungszahl keine Ganzen vorkommen, so erhalte ich auch im Quotienten keine Ganzen. Der vierte Theil von 7 Zehnteln = 1 Zehntel mit dem Reste 3 Zehntel. Da sich diese 3 Zehntel nicht mehr so in 4 gleiche Theile zerlegen lassen, daß man im Quotienten Zehntel erhält; so verwandle ich diese 3 Zehntel in Hundertstel. 0,3 = 0,30. Der vierte Theil von 30 Hundertstel = 7 Hundertstel, und 2 Hundertstel bleiben übrig. 0,02 = 0,020. Der vierte Theil von 20 Tausendstel = 5 Tausendstel. Also ist 0,7 : 4 = 0,175.

b. $0,7 : 4 = \frac{7}{10} : 4 = \frac{7}{40} = 0,175.$

Die schriftliche Form für die Berechnung ist nachstehende:

4 | 0,7 | 0,175
30
20

Aufgabe: $0,5 : 3 = ?$

Auflös. 3 | 0,5 | 0,16666 . . . . .
20
20
20
20
2

Anm. Die Theilung wird nicht aufgehen, wenn der Theiler nicht 2 oder 5, oder ein Produkt aus diesen Faktoren ist. Je weiter man die Theilung fortsetzt, desto mehr nähert man sich dem wahren Quotienten. In der Regel setzt man die Theilung nur so lange fort, als die Stellen für den jedesmaligen Zweck brauchbare Werthe geben. Sollen z. B. 0,5 fl. unter 3 Personen getheilt werden; so hat die dritte Stelle schon keinen zahlbaren Werth mehr; denn $^6/_{1000}$ fl. $= \frac{6 \times 60}{1000}$ Kzr. $= {}^{36}/_{100} = {}^{18}/_{50}$ Kzr. Wenn die Theilung nicht aufgeht, so wird dieses durch Tupfen angezeigt, welche man hinter die letzte Ziffer des Quotienten setzt.

Aufgabe: $0,03 : 10 = ?$

Auflös. $0,03 : 10 = {}^3/_{100} : 10 = {}^3/_{1000} = 0,003.$

Aufgabe: $0,03 : 100 = ?$

Auflös. $0,03 : 100 = {}^3/_{100} : 100 = {}^3/_{10000} = 0,0003.$

Aufgabe: $0,03 : 1000 = ?$

Auflös. $0,03 : 1000 = {}^3/_{100} : 1000 = {}^3/_{100000} = 0,00003.$

Nach §. 13. Regel VI. wird eine Zahl durch 10 getheilt, wenn man eben so viele Einheiten der nächst niedern Ordnung nimmt. Dieses wird bei zehntheiligen Brüchen ausgeführt, wenn man den Decimalstrich um eine Stelle von der rechten Hand zur linken fortrückt. (§. 17. h. 10.)

XXIII. Regel: Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu theilen, vervielfache den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl. Soll ein zehntheiliger Bruch durch eine ganze Zahl getheilt werden, so theile den Zähler und sorge dafür, daß die einzelnen Theile des Quotienten in die gehörige Stelle gesetzt werden. Bleibt

ein Rest, so hänge eine Nulle an, theile wieder und fahre so fort, bis kein Rest mehr bleibt, oder bis der Quotient die Anzahl Decimalstellen erhalten hat, welche er erhalten soll.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \times c} = \frac{a}{bc}.$$

3) Dividiere 7 durch $^3/_8$!

Auflös. a. $^1/_8$ ist in $1 = {}^8/_8$, 8 Mal und in $7 = 7 \times 1$, 7 Mal so oft, d. i. 56 Mal enthalten. Ist nun $^1/_8$ in 7, 56 Mal enthalten, so sind $^3/_8$, d. i. eine 3 Mal so große Zahl, als $^1/_8$, auch 3 Mal so wenig enthalten, als $^1/_8$; mithin sind $^3/_8$ in 7, $^{56}/_3$ Mal enthalten.

Es sollte eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiert werden. — Ich habe zuerst ein Ganzes durch $^1/_8$ gemessen, indem ich mir dieses Ganze als $^8/_8$ gedacht habe, sodann habe ich von 1 Ganzen auf 7 Ganzen und von $^1/_8$ auf $^3/_8$ geschlossen, indem ich die 2 schon früher (§. 13) erkannten Sätze angewendet habe: Multiplikation der Entvielfachungszahl = Multiplikation des Quotienten. Multiplikation des Divisors = Theilung des Quotienten. — Ich habe also bei der Auflösung 1 Mal gemessen und 2 Mal geschlossen.

b. $7 = {}^{56}/_8$; $^3/_8$ sind in $^{56}/_8$ so oft enthalten, als 3 in $56 = {}^{56}/_3$.

c. Theile ich 7 durch 3, so erhalte ich $^7/_3$; es soll aber nicht durch 3, sondern durch eine Zahl getheilt werden, welche 8 Mal so klein ist, als 3; daher wird der Quotient 8 Mal so groß, als $^7/_3$, d. i. $^{56}/_3 = 18^2/_3$.

Ich habe hier zuerst den Zähler des Entvielfachers als Entvielfacher betrachtet, in welchem Falle das Theilen angewendet werden kann. Hierauf habe ich geschlossen: Wird der Entvielfacher 8 Mal so klein, so wird das Ergebniß 8 Mal so groß. Das Ergebniß $^7/_3$ habe ich 8 Mal so groß gemacht durch Vervielfachung des Zählers mit 8.

Anm. Das Entvielfachen durch einen Bruch ist also ein zusammengesetztes Geschäft (Vervielfachen und Theilen), so wie das Vervielfachen mit einem Bruche ebenfalls ein zusammengesetztes Geschäft ist (§. 21), weil bei jedem Bruche zwei Vorstellungen vorkommen (§. 17 a.). Einfach entvielfachen (rein dividieren) lassen sich nur gleichnamige Brüche.

d. Ein einfaches Theilen ist nur möglich, wenn der Theiler eine ganze Zahl ist. Man verwandelt einen Bruch in eine ganze Zahl durch Multiplikation des Bruches mit einer Zahl, die gleich ist dem Nenner (§. 21. 6) $^3/_8 \times 8 = 3$.

Wird aber der Theiler mit einer Zahl multipliziert, die gleich ist dem Nenner des Theilers; so muß die Theilungszahl mit derselben Zahl multipliziert werden, damit der Quotient unverändert bleibt (§. 13. II. c. 14). Man erhält also $56 : 3 = 18^2/_3$.

Aufg. $14 : 0{,}09 = ?$

Auflös. $14 : 0{,}09 = 1400 : 9 = 155{,}55 \ldots$

Durch einen Bruch theilen, heißt durch den Zähler theilen und mit dem Nenner vervielfachen. Es ist in Bezug auf die Richtigkeit der Rechnung gleichgültig, welche Rechnungsart zuerst vorgenommen wird (§. 15. c. 4).

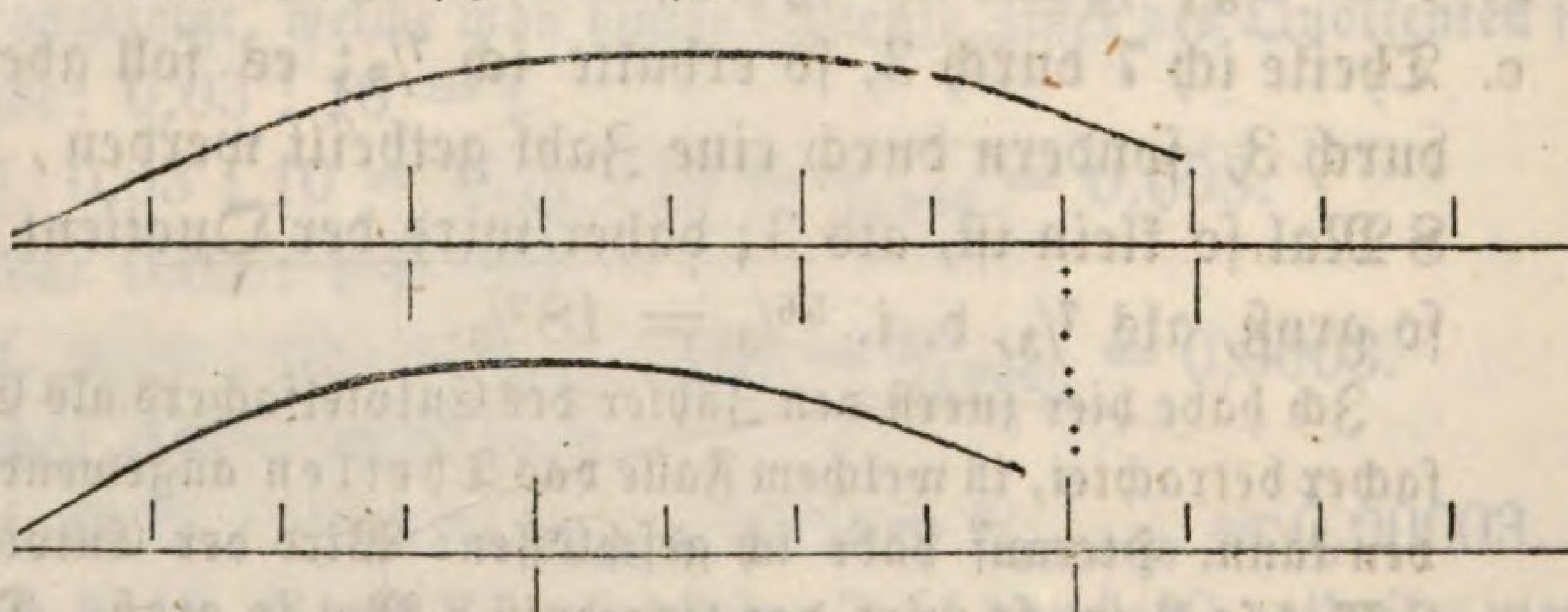
Regel: Um eine ganze Zahl durch einen Bruch zu entvielfachen, vervielfache die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, und theile dieses Produkt durch den Zähler desselben.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Anm. Wenn der Entvielfacher ein ächter Bruch ist, so ist das Ergebniß jedes Mal größer, als die Entvielfachungszahl.

4) $^3/_4 : ^2/_3 = ?$

Auflös. a. $^2/_3 = {}^8/_{12}$, $^3/_4 = {}^9/_{12}$; $^8/_{12}$ sind in $^9/_{12}$ so oft enthalten, als 8 in $9 = {}^9/_8 = 1^1/_8$ Mal.



An dem obern Striche ist die Entvielfachungszahl, an dem untern der Entvielfacher, welcher hier ein Maß ist, dargestellt. Man kann nun das Maß auf dem obern Striche 1 Mal auftragen und dann bleibt ein Theil übrig. Auf diesen Theil kann man noch $^1/_8$ vom Maß auftragen; also ist das Maß $^2/_3$ in $^3/_4$, $1^1/_8$ Mal enthalten.

b. $^2/_3$ ist in $1 = {}^3/_3$, $^3/_2$ Mal enthalten. Nun ist $^3/_4$, $^3/_4$ Mal so groß, als 1; also muß $^2/_3$ in $^3/_4$ auch $^3/_4$ Mal so oft enthalten sein, als in 1 d. i. $^3/_4 \times {}^3/_2 = {}^9/_8$ Mal.

c. Theile ich $^3/_4$ durch 2, so erhalte ich $^3/_8$ nach der Regel XXIII. Es soll aber nicht durch 2, sondern durch eine Zahl

getheilt werden, welche 3 Mal so klein ist, als 2; also wird das Ergebniß 3 Mal so groß, als $^3/_8$ (§. 13. II. c. 11), d. i. $^9/_8$.

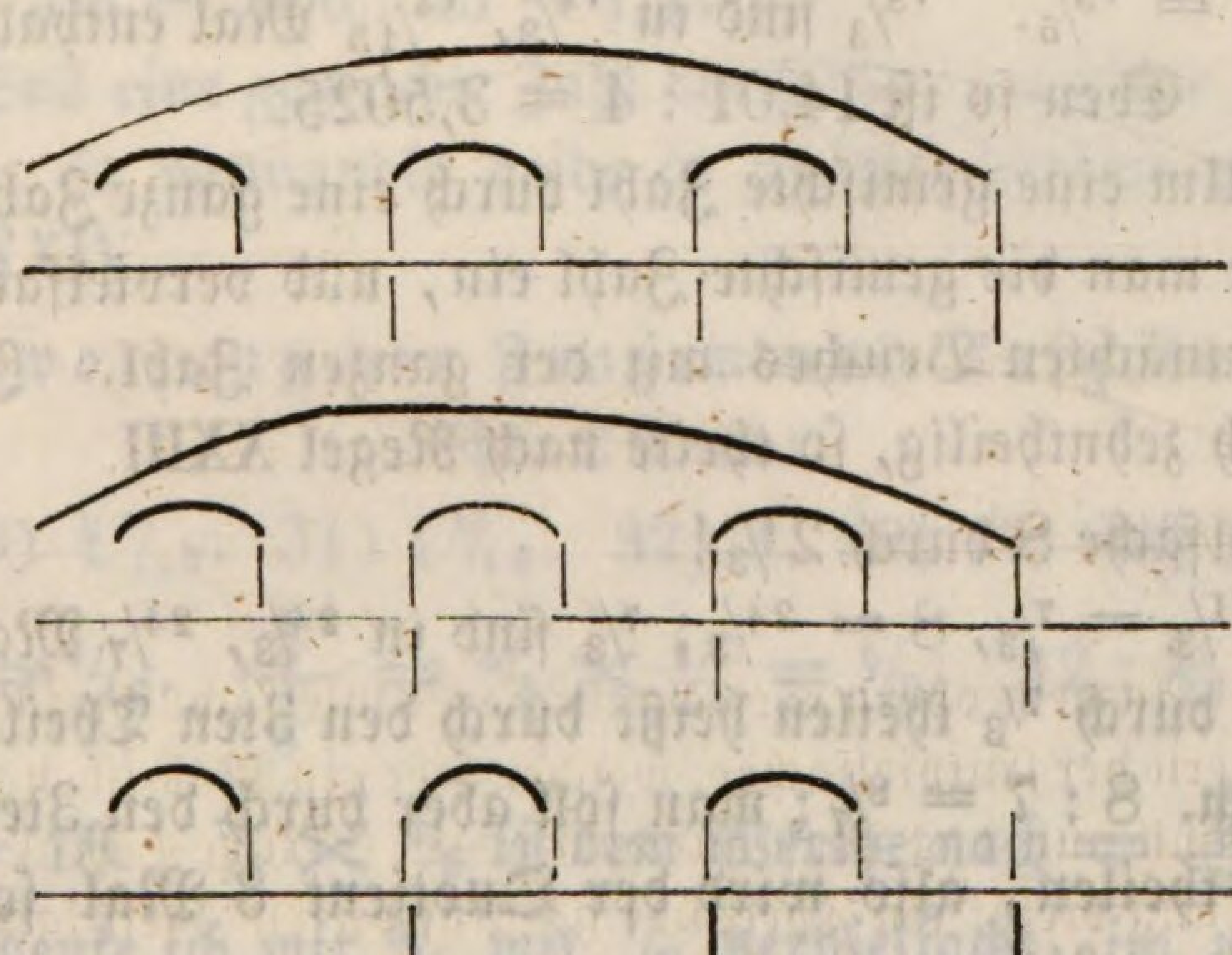
Es soll ein ächter Bruch durch einen ächten Bruch dividiert werden. — Ich habe zuerst den Zähler des Divisors als Divisor betrachtet, in welchem Falle die Form des Entvielfachens angewendet wird, welche das Theilen heißt, und habe so den Quotienten $^3/_8$ erhalten, indem ich den Nenner der Theilungszahl mit 2 vervielfacht habe. Nun habe ich geurtheilt und geschlossen: Wenn der Theiler 3 Mal so klein wird und die Theilungszahl unverändert bleibt; so wird der Quotient 3 Mal so groß. Da nun der Theiler nicht 2, sondern $^2/_3$, also eine Zahl ist, welche 3 Mal so klein, als 2; so ist auch der Quotient der Aufgabe 3 Mal so groß als $^3/_8$, und der Quotient wird 3 Mal so groß, wenn man den Zähler desselben mit 3 vervielfacht.

$^3/_4 : {}^2/_3$ ist also $= {}^3/_4 \times {}^3/_2 = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = {}^9/_8$.

d. $^3/_4 : {}^2/_3 = \frac{3 \times 3}{4} : 2 = {}^9/_4 : 2 = {}^9/_8$.

Ich habe hier zuerst Divisor und Dividendus mit einer und derselben Zahl multipliziert (§. 13. II. c. 14) und dadurch die Aufgabe auf den Fall zurückgeführt: einen Bruch durch eine ganze Zahl zu theilen. Dieses wurde nach Regel XXIII. ausgeführt.

Anschaulich dargestellt:



Es ist hier $^3/_4$ dreimal dargestellt und jedes Viertel durch 2 getheilt. Dieselbe Darstellung erhält man, wenn man $^3/_4$ zuerst durch 2 theilt und den dadurch erhaltenen Quotienten mit 3 vervielfacht.

Aufg. 0,7 : 0,04 = ?

Auflös. 0,7 : 0,04 = $^{70}/_4$ = 17,5.

Denn $0{,}7 : 0{,}04 = \frac{7}{10} : 0{,}04 = \frac{7 \times 100}{10} : 4 = 70 : 4 = 17{,}5$.

Ebenso ist: $0{,}03 : 0{,}9 = 0{,}3 : 9 = 0{,}0333 \ldots.$

XXIV. Regel: Soll ein Bruch durch einen Bruch gemessen werden, so mache die Brüche gleichnamig und untersuche, wie oft der Zähler des Entvielfachers im Zähler der Entvielfachungszahl enthalten ist. Soll ein Bruch getheilt werden, so kehre den Divisor um, d. h. mache seinen Zähler zum Nenner und seinen Nenner zum Zähler, und vervielfache dann die beiden Brüche.

Soll ein Decimalbruch durch einen Decimalbruch getheilt werden, so multiplizíere Theiler und Theilungszahl mit dem Nenner des Theilers und theile.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

5) Entvielfache $4\frac{2}{3}$ durch 5!

Auflös. a. Der 5te Theil von $4 = \frac{4}{5}$, der 5te Theil von $\frac{2}{3} = \frac{2}{15}$; $\frac{4}{5} + \frac{2}{15} = \frac{12}{15} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15}$.

b. $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$. Der 5te Theil von $\frac{14}{3} = \frac{14}{15}$.

c. $5 = \frac{15}{5}$. $\frac{15}{3}$ sind in $\frac{14}{3}$, $\frac{14}{15}$ Mal enthalten.

Eben so ist $14{,}01 : 4 = 3{,}5025$.

Regel: Um eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl zu entvielfachen, richte man die gemischte Zahl ein, und vervielfache dann den Nenner des unächten Bruches mit der ganzen Zahl. Ist der angehängte Bruch zehntheilig, so theile nach Regel XXIII.

6) Entvielfache 8 durch $2\frac{1}{3}$!

Auflös. a. $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, $8 = \frac{24}{3}$; $\frac{7}{3}$ sind in $\frac{24}{3}$, $\frac{24}{7}$ Mal enthalten.

b. 8 durch $\frac{7}{3}$ theilen heißt durch den 3ten Theil von 7 theilen. $8 : 7 = \frac{8}{7}$; man soll aber durch den 3ten Theil von 7 theilen, also wird der Quotient 3 Mal so groß, als $\frac{8}{7} = \frac{24}{7}$.

Eben so ist $77 : 3{,}5 = 770 : 35 = 22$.

Regel: Soll eine ganze Zahl durch eine gemischte dividiert werden; so richte die gemischte Zahl ein, vervielfache die ganze Zahl mit dem Nenner des unächten Bruches, und theile dieses Produkt durch den Zähler desselben.

7) Dividiere $3\frac{3}{4}$ durch $\frac{2}{3}$!

Auflös. $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$. $\frac{15}{4} : \frac{2}{3} = \frac{15}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15 \times 3}{4 \times 2} = \frac{45}{8}$ $= 5\frac{5}{8}$.

Eben so ist 1,06 : 0,8 = 10,6 : 8 = 1,325.

Regel: Soll eine gemischte Zahl durch einen Bruch entvielfacht werden, so richte die gemischten Zahlen ein, kehre den Entvielfacher um und vervielfache. Soll eine gemischte Zahl mit angehängtem Decimalbruch durch einen Decimalbruch getheilt werden, so multiplizierе Theiler und Theilungszahl mit dem Nenner des Theilers und theile nach Regel XXIII.

8) $\frac{5}{8} : 2\frac{6}{7} = ?$

Auflös. $2\frac{6}{7} = \frac{20}{7}$, $\frac{5}{8} : \frac{20}{7} = \frac{5}{8} \times \frac{7}{20} = \frac{5 \times 7}{8 \times 20} = \frac{7}{8 \times 4} = \frac{7}{32}$.

Eben so ist 0,8 : 1,6 = 8 : 16 = $\frac{1}{2}$.

Regel: Soll ein Bruch durch eine gemischte Zahl getheilt werden; so verwandle die gemischte Zahl in einen unächten Bruch, kehre denselben um und vervielfache. Bei zehntheiligen Brüchen multiplizierе Theiler und Theilungszahl mit dem Nenner des Theilers, und theile.

9) $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3}$!

Auflös. $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{5}{2} : \frac{4}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

Aufg. 5,06 : 4,3 = ?

Aufl. 5,06 : 4,3 = 50,6 : 43 = 1,176 . . . .

Regel: Soll eine gemischte Zahl durch eine gemischte Zahl entvielfacht werden; so verwandle beide in unächte Brüche und verfahre nach Regel XXIV.

Beantwortung der Fragen und Aufgaben von Nr. 29 an:

29) 18. 30) $1\frac{1}{15}$. 31) $1\frac{4}{15}$. 32) 3. 33) 12. 34) $1\frac{1}{4}$. 35) $\frac{1}{3} : 4 = \frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{12}$. $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$. $12 : \frac{2}{3} = \frac{12}{\frac{2}{3}} =$ $12 \times \frac{3}{2} = 18$. $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$ ist dem Werthe nach $= \frac{\frac{5}{6}}{2}$; aber im ersten Falle denke ich mir $\frac{5}{6}$ mit $\frac{1}{2}$ vervielfacht, im zweiten Falle $\frac{5}{6}$ durch 2 getheilt.

---

1) Ist eine Divisionsaufgabe gegeben, so kann der Sinn der Aufgabe verlangen, daß man eine Zahl in so viel gleiche Theile zerlege, als eine andere Zahl angibt, oder daß man untersuche, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist.

2) Wenn man untersuchen will, wie oft ein Bruch in einem andern enthalten ist; so müssen diese Brüche gleichnamig sein. Eine Zahl wird durch einen Bruch getheilt, wenn man sie mit dem Nenner des Bruches vervielfacht und dieses Vielfache durch den Zähler desselben theilt. Ein Bruch wird auch durch einen Bruch getheilt, wenn ich Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner theile.

$^3/_4 : ^2/_3 = \frac{3:2}{4:3} = ^3/_4 \times ^3/_2 = ^9/_8.$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$

3) $^3/_4 \times ^2/_3$ heißt $^3/_4$ mit 2 multiplizieren und durch 3 theilen. $^3/_4 : ^2/_3$ heißt $^3/_4$ durch 2 theilen, und mit 3 multiplizieren.

4) Wenn eine gemischte Zahl durch eine gemischte Zahl getheilt werden soll, so darf nicht jeder Theil der Theilungszahl durch jeden Theil des Theilers getheilt werden; denn Theilung durch die einzelnen Posten ist nicht = Theilung durch den ganzen Theiler.

II. Schriftlich.

a.

1) $^5/_8 : ^3/_8 = 1^2/_3$.

2) $^5/_7 : ^3/_7 = 1^2/_3$; $^9/_{11} : ^4/_{11} = 2^1/_4$; $0,16 : 0,11 = 1^5/_{11}$.

3) $^5/_7 : 3 = ^5/_{21}$; $^2/_3 : 6 = ^1/_9$; $^3/_8 : 4 = ^3/_{32}$; $^7/_9 : 5 = ^7/_{45}$; $4^3/_7 : 8 = ^{31}/_{56}$; $3 : 10 = 0,3$; $17 : 10 = 1,7$; $629 : 10 = 62,9$; $4 : 100 = 0,04$; $27 : 100 = 0,27$; $629 : 100 = 6,29$; $6 : 1000 = 0,006$; $85 : 1000 = 0,085$; $863 : 1000 = 0,863$; $0,7 : 10 = 0,07$; $0,7 : 100 = 0,007$; $0,7 : 1000 = 0,0007$; $1,03 : 10 = 1,003$; $1,03 : 100 = 1,0003$; $1,03 : 1000 = 1,00003$; $0,004 : 10 = 0,0004$; $0,004 : 100 = 0,00004$; $0,004 : 1000 = 0,000004$.

4) $4 : ^2/_3 = 6$; $6 : ^4/_5 = 7^1/_2$; $7 : ^5/_8 = 11^1/_5$; $^8/_7 : ^3/_7 = 2^2/_3$; $^2/_{11} : 9 = ^2/_{99}$; $8 : ^3/_4 = 10^2/_3$; $11 : ^6/_7 = 12^5/_6$; $^{19}/_{60} : 18 = ^{19}/_{1080}$; $14 : ^4/_7 = 24^1/_2$; $19 : ^3/_5 = 31^2/_3$; $7 : ^2/_7 = 24^1/_2$; $5 : ^4/_5 = 6^1/_4$; $1 : ^2/_3 = 1^1/_2$; $^4/_5 : 1 = ^4/_5$.

5) $^1/_4 : ^1/_3 = ^3/_4$; $^1/_2 : ^1/_5 = 2^1/_2$; $^1/_3 : ^1/_2 = ^2/_3$; $^1/_2 : ^1/_6 = 3$.

6) $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = 1\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8} : \frac{2}{7} = 2\frac{3}{16}$; $\frac{8}{9} : \frac{4}{5} = 1\frac{1}{9}$; $\frac{3}{8} : \frac{6}{7} = \frac{7}{16}$; $\frac{2}{3} : \frac{5}{9} = 1\frac{1}{5}$; $\frac{8}{9} : \frac{4}{7} = 1\frac{5}{9}$; $\frac{4}{5} : \frac{3}{11} = 2\frac{14}{15}$; $\frac{5}{11} : \frac{4}{9} = 1\frac{1}{44}$; $\frac{5}{8} : \frac{1}{12} = 7\frac{1}{2}$; $\frac{3}{14} : \frac{6}{7} = \frac{1}{4}$; $\frac{5}{18} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8}$.

7) $4 : 2\frac{1}{3} = 1\frac{5}{7}$; $\frac{3}{7} : 5\frac{1}{2} = \frac{6}{77}$; $4\frac{1}{8} : 6 = \frac{11}{16}$; $7\frac{1}{2} : 5\frac{1}{2} = 1\frac{4}{11}$; $5\frac{3}{8} : 6\frac{1}{3} = \frac{129}{152}$; $15\frac{1}{4} : 4\frac{3}{7} = 3\frac{55}{124}$; $15\frac{3}{8} : 7\frac{3}{4} = 1\frac{61}{62}$; $60\frac{4}{11} : 6\frac{7}{9} = 8\frac{608}{671}$; $106\frac{5}{9} : 15\frac{3}{7} = 6\frac{881}{972}$; $3\frac{1}{8} : 16 = \frac{25}{128}$; $14 : 5\frac{1}{2} = 2\frac{6}{11}$; $\frac{9}{11} : \frac{4}{5} = 1\frac{1}{44}$; $13\frac{2}{3} : \frac{7}{8} = 15\frac{13}{21}$; $37\frac{4}{9} : 6\frac{4}{7} = 5\frac{148}{207}$; $1096\frac{3}{4} : 19\frac{7}{8} = 55\frac{29}{159}$; $0,03 : 0,7 = 0,04285714 \ldots$; $2,3 : 9,04 = 0,2541 \ldots$; $0,107 : 1,4 = 0,076428 \ldots$

b.

1) $\frac{31}{40}$ fl. 2) $10\frac{41}{114}$. 3) 7 Arb. 4) $\frac{5}{14}$. 5) $50\frac{1}{160}$. 6) $87\frac{15}{52}$.

§. 23.

Vermischte Aufgaben.

a.

1) $\frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{2}{4} = \frac{2\frac{1}{2}}{5} = \frac{3\frac{1}{2}}{7} = 0,5 = 0,50$; denn $1 = \frac{3}{3}$, mithin $\frac{1}{2} = \frac{1\frac{1}{2}}{3}$ u. s. w.

Wenn ein Bruch in einen andern verwandelt werden soll, dessen Nenner bekannt ist; so ist entweder der Nenner des gegebenen Bruches ein Faktor des andern Nenners, oder er ist in diesem Nenner nicht ohne Rest enthalten. Im ersten Falle verfahre man nach Regel XVI. §. 18. I. Der andere Fall kommt vor, wenn ein Bruch, dessen Nenner aus anderen Faktoren, als 2 oder 5, oder 2 und 5 besteht, in einen zehntheiligen Bruch verwandelt werden soll, vorausgesetzt, daß dieser Bruch durch das Abkürzen (§ 18. II.) in die kleinste Form gebracht ist.

So enthält der Nenner des Bruches $\frac{18}{24}$ außer den Faktoren $2 \times 2 \times 2$ auch den Faktor 3. Da aber dieser Faktor auch im Zähler vorkommt, so kann er durch das Abkürzen entfernt, und der Bruch $\frac{18}{24} : \frac{6}{6} = \frac{3}{4}$ kann vollständig in einen Decimalbruch verwandelt werden. Wenn man einen zehntheiligen Bruch will, so sucht man außer den Ganzen, Zehntel, Hundertstel, Tausendstel u. s. w. zu haben. Will man

aber Zehntel, Hundertstel u. s. w. im Quotienten, so muß man auch im Dividenden Zehntel, Hundertstel u. s. w. haben.

Soll daher ein gemeiner Bruch in einen zehntheiligen Bruch verwandelt werden; so theile den Zähler durch den Nenner, verwandle den Rest in Zehntel, Hundertstel, Tausendstel u. s. w. durch Anhängung von Nullen und fahre so fort, bis sich kein Rest mehr ergibt, oder die nöthige Anzahl von Decimalstellen gefunden ist. (§. 22. 2.)

Z. B. $^4/_7 = ?$

```
7 | 4,0 | 0,571428 . . . .
    35
    --
     50
     49
     --
      10
       7
      --
       30
       28
       --
        20
        14
        --
         60
         56
         --
          4
```

2) $^3/_5 = 0{,}6$; $^3/_4 = 0{,}75$; $^1/_{80} = 0{,}0125$.

3) $^1/_3 = \frac{3\frac{1}{3}}{10} = \frac{33\frac{1}{3}}{100} = \frac{333\frac{1}{3}}{1000} = \frac{3333\frac{1}{3}}{10000} =$ $0{,}3333 \ldots$; $^1/_7 = \frac{\frac{10}{7}}{10} = \frac{\frac{100}{7}}{100} = \frac{\frac{1000}{7}}{1000} =$ $\frac{\frac{10000}{7}}{10000} = \frac{1428\frac{4}{7}}{10000} = 0{,}1428 \ldots .$

4) A. = $176^2/_9$ fl.; B. = $132^1/_6$ fl; C. = $220^5/_{18}$ fl.; C. hat $44^1/_{18}$ fl. mehr, als A. und $88^1/_9$ mehr, als B. 5) $^1/_3 \times {}^2/_5 = {}^2/_{15}$; $^3/_4 \times {}^2/_{15} = {}^1/_{10}$. 6) $120^{33}/_{64}$ Quadratruthen. 7) 14. 8) Auf zweierlei Art; durch Theilung des Zählers und durch Vervielfachung des Nenners mit 3. $^4/_{15}$ kann ich mir auf zweierlei Art aus $^4/_5$ entstanden denken: 1) durch Vervielfachung mit $^1/_3$ und 2) durch Theilung mit 3. 9) $55^{13}/_{60}$ Stdn. 10) a. $2^{13}/_{30}$ Stdn. b. $1^{29}/_{60}$ Stdn. 11) a. $84^9/_{14}$ Pfd. b. $14^3/_{28}$

Pfd. c. $183^{11}/_{28}$ Pfd. d. 22 fl. $55^{25}/_{56}$ Kzr. 12) a. $231^{1}/_{4}$ Klftr. b. für Buchenholz $2023^{1}/_{8}$ fl.; für Eichenholz $1147^{9}/_{16}$ fl., im Ganzen $3170^{11}/_{16}$ fl.; C. $396^{43}/_{128}$ fl. 13) Man verwandelt jede ganze Zahl in 1, wenn man diese Zahl durch sie selbst theilt.

14) Jeder Bruch wird in 1 verwandelt, wenn man ihn mit dem umgekehrten Bruche vervielfacht. $^{2}/_{3} \times ^{3}/_{2} = 1$.

15) Jeder Bruch wird in 1 verwandelt, wenn man ihn durch ihn selbst entvielfacht.

16) Eine ganze Zahl a wird durch eine andere ganze Zahl b getheilt, wenn man die erste Zahl als Zähler und die andere als Nenner anschreibt. $\frac{a}{b}$.

17) Das Verwandeln höherer Sorten in niedere und niederer Sorten in höhere muß nun mit Hülfe der Regeln VIII und IX §. 14 für die Fälle, daß die gegebene Zahl ein Bruch oder eine gemischte Zahl ist, tüchtig eingeübt werden.

$^{1}/_{8}$ fl. $= \frac{1.60}{8}$ Kzr. $= 7^{1}/_{2}$ Kzr.; $^{2}/_{8}$ fl. $= 15$ Kzr.; $^{3}/_{8}$ fl. $= 22^{1}/_{2}$ Kzr.; $^{7}/_{8}$ fl. $= 52^{1}/_{2}$ Kzr.; $6^{1}/_{2}$ Kzr $= \frac{13}{2.60} = {}^{13}/_{120}$ fl.; $7^{1}/_{4}$ Kzr. $= \frac{29}{4 \times 60}$ fl. $= {}^{29}/_{240}$ fl.; $25^{1}/_{2}$ Kzr. $= \frac{51}{2.60}$ fl. $= {}^{17}/_{40}$ fl.

18) $9^{3}/_{4}$ Loth $= {}^{39}/_{128}$ ℔; $5^{3}/_{8}$ ℔ $= {}^{43}/_{800}$ Ztnr.; $6^{3}/_{5}$ Ztnr. $=$ 660 ℔; $9^{4}/_{7}$ Wochen $= 67$ Tage; $2^{5}/_{73}$ Jahre $= 755$ Tage.

19) 8 ℔ + $6^{2}/_{3}$ Loth $= {}^{197}/_{2400}$ Ztnr.

Anm. Die Aufgaben §. 23. b. und c. eignen sich nur für Gymnasien, höhere Bürgerschulen u. s. w. Für Schüler dieser Anstalten finden sich Aufgaben über Resolution und Reduktion mit zehntheiligen Brüchen im Rechenunterrichte V. Stufe. §. 34.

b.

1) 7,09 + 2,643 = 9,733.
2) 1,00054 + 237,69 = 238,69054.
3) 0,729+69+43,73+147,62079+0,00649+3,89= 265,97628.
4) 17,69−0,279=17,411.
5) 7−3,14159=3,85841.
6) 96,5−0,000783=96,499217.
7) 4,69−1,3400037=3,3499963.
8) 4,7×137=643,9.

9) $5,007 \times 0,39 = 1,95273$.
10) $0,00006 \times 4987 = 0,29922$.
11) $203,2432 \times 2,365 = 480,670168$.
12) $0,06691 \times 0,5632 = 0,037683712$.
13) $3,4965 \times 279,85 = 978,495525$.
14) $0,09571 : 17 = 0,00563$.
15) $9,62 : 2,6 = 3,7$.
16) $94,0328 : 0,437 = 215,1$.
17) $6,93025 : 279,4 = 0,0248$.
18) $52 : 425,3 = 0,122$.
19) $6270 : 598 = 10,4849498$.
20) $96,67 : 356,724 = 0,276$.
21) $8/9 = 0,888 \ldots$
22) $1/11 = 0,090909 \ldots$
23) $2/11 = 0,181818 \ldots$
24) $3/11 = 0,272727 \ldots$
25) $7/11 = 0,636363 \ldots$
26) $9/11 = 0,818181 \ldots$
27) $7/12 = 0,583333 \ldots$
28) $13/4000 = 0,00325$.
29) $1/407 = 0,002457002457$.
30) $1,4357/17 = 0,0845$.

c.*)

1) $6,4 \times 0,007 - 0,0316 = 0,0132$

2) $\dfrac{(2\tfrac{3}{4} - 1\tfrac{5}{6})\ 0,7}{9} = 0,0712 \ldots$

3) $4\tfrac{3}{7} + 800\tfrac{5}{9} - 67\tfrac{2}{3} + 15,03 - 0,9 = 751\tfrac{2819}{6300}$

4) $\dfrac{(2\tfrac{5}{6} - \tfrac{3}{8})\ 0,09}{0,3} = 0,7375$.

5) $\dfrac{106,3 \times 54,007}{1,358} = 4227,499$.

6) $\dfrac{(17\tfrac{1}{25} - 3\tfrac{97}{125})\ 2,7}{0,09} = 397,92$.

7) $\dfrac{28\tfrac{3}{4} + 189\tfrac{5}{6} - 37\tfrac{3}{8}}{1,05} = 172\tfrac{73}{126}$.

---

*) Siehe §. 15. c.

8) $\frac{(7\frac{3}{4}-2\frac{5}{6})\,3{,}07}{\frac{5}{8}}=24{,}1506$.

9) $(5{,}2-3\frac{7}{8})\,\frac{5}{6}=1{,}104166\ldots$

10) $(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8})\times\frac{4}{5}=\frac{29}{30}$.

11) $(17\frac{3}{125}-2\frac{968}{1225}):\frac{2}{3}=21\frac{2148}{6125}$.

12) $\frac{(6\frac{3}{8}-1\frac{97}{118})\,\frac{5}{9}}{\frac{1}{3}}=7\frac{833}{1416}$.

13) $(0{,}7+826\frac{3}{15})\times(2\frac{7}{32}-\frac{413}{640})=1301\frac{483}{6400}$.

14) $\frac{(3{,}02+67{,}3)(1{,}008-0{,}69)}{0{,}0307}=728{,}396$

15) $\frac{(9{,}03\times4{,}1)-(0{,}7+0{,}002)}{2{,}4}=15{,}13375$

16) $\frac{(47{,}3\times6{,}0715)-(6{,}04+0{,}0013-1{,}029)}{1{,}07}=263{,}70995\ldots$

17) $\frac{(15\frac{4}{5}-2{,}7)(5\frac{2}{3}+1\frac{5}{6})}{0{,}3-0{,}07}=427{,}1739$

18) $\frac{(\frac{3}{5}+2\frac{2}{3})-(\frac{5}{7}-\frac{1}{3})}{\frac{3}{4}}=3\frac{89}{105}$.

19) $(627\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+13\frac{7}{30}-2\frac{19}{48})(8\frac{5}{6}-2\frac{2}{3}-3\frac{5}{8})=$
$1624\frac{1373}{2688}$.

20) $\frac{(8\frac{7}{16}-3\frac{97}{128})(6{,}3-1{,}017)}{4{,}5+0{,}0007}=5{,}49309864\ldots$

21) $\frac{(13{,}01-6{,}5+7{,}813)\,3{,}0009}{18{,}57-5{,}069}=3{,}18360\ldots$

22) $\frac{(123\frac{4}{5}-18\frac{197}{1225})(6\frac{2}{3}+4\frac{5}{7})}{29\frac{5}{17}}=41\frac{88909}{2135175}$.

d.

Der halbe Theil von 4 ist gleich dem dritten Theil von 6; oder: 2 ist in 4 so oft enthalten, als 3 in 6.

$$4 : 2 = 6 : 3.$$

Werden die beiden gleichen Brüche $\frac{4}{2}$ und $\frac{6}{3}$ in der Divisionsform angeschrieben und die 2 Quotienten durch das Gleichheitszeichen verbunden; so spricht man diese Wahrheit in der Regel so aus: 2 verhält sich zu 4, wie 3 zu 6, und nennt diese Zusammenstellung zweier gleichen Brüche, oder zweier Theilungen mit gleichen Quotienten: eine geometrische Proportion.

Da eine geometrische Proportion sich nur durch die Darstellung *), nur in der Form, von zwei gleichen Brüchen unterscheidet; so müssen alle Wahrheiten, die sich bei Vergleichung zweier gleichwerthigen Brüche ergeben, auch an einer geometrischen Proportion nachgewiesen werden können. Z. B. Der Werth zweier gleichen Brüche bleibt unverändert, wenn man beide mit einer und derselben Zahl vervielfacht; es ist $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$, also auch $\frac{4 \times 3}{2} = \frac{6 \times 3}{3}$; daher bleibt auch eine Proportion unverändert, wenn man das zweite und vierte Glied mit derselben Zahl vervielfacht u. s. w. Die Wahrheiten, auf welche sich die Lehre von den Proportionen gründet, können wir beim Rechnen nicht entbehren; allein der Proportions form bedürfen wir in der Volksschule durchaus nicht; es ist daher auch unnöthig, die Schüler auf dieser Stufe mit den bei den Proportionen üblichen Benennungen bekannt zu machen. Schüler höherer Anstalten werden von §. 31 an in der Behandlung dieser und anderer Ansatzformen geübt.

Anhang.

§. 24.

Kennzeichen der Zahlen, welche sich durch andere ohne Rest theilen lassen.

1) 1 ist in jeder Zahl ohne Rest enthalten, und der Quotient ist gleich dieser Zahl; aber es kann keine Zahl durch 1 getheilt werden, daher sagt man auch: 1 theilt nicht.

Nimmt man 1 als Divisor an, so kann nur der Begriff des Enthaltenseins und nicht der des Theilens angewendet werden.

2) Jeder Zehner läßt sich durch 2 ohne Rest theilen, folglich auch jeder Hunderter, Tausender u. s. w.; lassen sich nun auch die Einer durch 2 ohne Rest theilen, so muß die ganze Zahl durch 2 ohne Rest theilbar sein. Es ist z. B. $2476 = 247 \times 10 + 6$, und $2476 : 2 = \frac{247 \times 10}{2} + \frac{6}{2} = 247 \times \frac{10}{2} + \frac{6}{2}$. Da nun 10 durch

*) Die Sache bleibt dieselbe, man mag sich der Bruchform oder der Verhältnißform bedienen. Bei der Anwendung in benannten Zahlen wählt man die Verhältnißform, wenn die Werthgleichheit zweier Dinge bekannt ist und daraus die Beziehung bestimmter Mengen dieser Dinge erst gefolgert werden soll.

2 theilbar ist; so ist der Quotient eine ganze Zahl, wenn die letzte Ziffer durch 2 theilbar, oder eine gerade Zahl ist.

Anm. Eine ganze Zahl heißt durch eine andere ganze Zahl theilbar, wenn der Quotient eine ganze Zahl wird, d. h. wenn es eine ganze Zahl gibt, welche mit dem Theiler vervielfacht, gerade die Theilungszahl hervorbringt.

Jede ganze Zahl ist nur durch ihre einfachen Faktoren und alsdann noch durch jedes mögliche Produkt aus je 2, je 3, je 4 u. s. w. dieser einfachen Faktoren (zuletzt aus allen) theilbar. Die Zahl ist außer diesen einfachen Faktoren durch keine andere Zahl ohne Rest theilbar.

Die Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahl gründen sich auf den Satz: Theilung aller Posten = Theilung der Summe.

3) Theilt man einen Zehner durch 3, so bleibt 1 als Rest; wird daher irgend eine Anzahl Zehner durch 3 getheilt, so kann man annehmen, daß jedes Mal so vielmal 1 Rest bleibt, als Zehner vorhanden sind. Dasselbe ist der Fall, wenn Hunderter, Tausender, Zehntausender u. s. w. durch 3 getheilt werden; immer bleibt so vielmal 1 Rest, als Hunderter, Tausender, Zehntausender u. s. w. da sind. Die Menge der Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. wird durch die Ziffern in den betreffenden Stellen bezeichnet; der Rest, welcher bei der Division der Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. mit 3 bleibt, muß daher so groß sein, als die Summe der Zahlen, welche durch die einzelnen Ziffern dargestellt werden, wenn man nicht den Stellenwerth, sondern nur den Werth berücksichtiget, den die Ziffern ihrer Form (Figur) nach haben. Zählt man zur Summe dieser Reste noch die Menge der Einer, so hat man die Quersumme; und ist also diese durch 3 ohne Rest theilbar, so ist 3 in der ganzen Zahl ohne Rest enthalten. Z. B. Die Quersumme von 1029 ist = 1 + 2 + 9 = 12; 12 läßt sich durch 3 ohne Rest theilen, also ist auch 1029 durch 3 ohne Rest theilbar.

Man kann die Einheiten einer jeden Ordnung so in 2 Posten zerlegen, daß der zweite Posten so viele Einer enthält, als Einheiten dieser Ordnung gegeben sind. Z. B. 6 Einer = 0 + 6 E.; 4 Z. = 36 E. + 4 E.; 5 H. = 495 E. + 5 E. u. s. w. Sobald dieses geschieht, so wird man als ersten Posten eine Zahl erhalten, welche durch 3 ohne Rest theilbar ist. Wenn daher die Summe der zweiten Posten ohne Rest theilbar ist, so muß die ganze Zahl ohne Rest theilbar sein. 687 = (494+6)+(72+8)+(0+7). Man hat hier die Einheiten jeder Ordnung so in zwei Posten zerlegt, daß die ersten Posten durch 3 ohne Rest

theilbar sind. Da sich nun auch die Summe der zweiten Posten $=6+8+7=21$ durch 3 ohne Rest theilen läßt; so ist daraus ersichtlich, daß 687 durch 3 ohne Rest theilbar ist.

4) Ein Hunderter läßt sich durch 4 ohne Rest theilen, denn 100 ist ein Vielfaches von 4, $100 = 25 \times 4$; folglich lassen sich alle Hunderter, und folglich auch alle Einheiten höherer Ordnungen (da jede Einheit einer höhern Ordnung als ein Vielfaches von 100 gedacht werden kann) durch 4 ohne Rest theilen. Ist daher 4 in der Zahl enthalten, welche durch die beiden Ziffern auf der Einer- und Zehnerstelle bezeichnet wird, so ist die ganze Zahl durch 4 ohne Rest theilbar. Z. B. Die Zahl 723512 kann durch 4 ohne Rest getheilt werden, weil 4 in 12 aufgeht. Denn $723512=7235\times100+76$; also $^{723512}/_4=7235\times{}^{100}/_4+{}^{76}/_4$; da nun 100 immer durch 4 theilbar ist, so bleibt nur die Frage, ob sich 76 durch 4 ohne Rest theilen läßt.

5) 10 ist durch 5 ohne Rest theilbar, folglich auch alle Vielfachen von 10. Ist daher die Ziffer auf der Einerstelle 0 oder 5, so läßt sich die ganze Zahl durch 5 theilen. $2475 : 5 = 247 \times 10 : 5 + 5 : 5$.

6) 6 ist in jeder Zahl ohne Rest enthalten, in welcher der Faktor 2 einmal und der Faktor 3 einmal vorkommt; daher sind auch alle Zahlen durch 6 ohne Rest theilbar, deren Einer durch 2, und deren Quersumme durch 3 ohne Rest theilbar ist.

7) Für die Theilbarkeit einer Zahl durch 7 gibt es kein einfaches Kennzeichen; das im „Rechenunterrichte" angegebene bedarf keines Beweises. Es sei zu untersuchen, ob sich die Zahl 2142 durch 7 theilen lasse.

1 Zehner durch 7 getheilt, läßt den Rest 3; also lassen 4 Zehner durch 7 getheilt den Rest . . . . $4\times3=12$
1 Hunderter durch 7 getheilt, läßt den Rest 2
1 Tausender durch 7 getheilt, läßt den Rest 6; also
lassen 2 Tausender den Rest . . . . $2\times6=12$
dazu die Einer $= 2$
Summe $=28$

Die Summe der Reste (28) ist durch 7 ohne Rest theilbar, also läßt sich die ganze Zahl durch 7 ohne Rest theilen.

8) Ein Tausender läßt sich durch 8 ohne Rest theilen, denn $^{1000}/_8=125$, also jede Anzahl Tausender und mithin auch jede Ein-

heit einer höhern Ordnung. Sind also die 3 ersten Stellen rechts, als eine Zahl betrachtet, durch 8 ohne Rest theilbar, so ist die ganze Zahl durch 8 ohne Rest theilbar. Z. B. 576424=576. 1000+424. Weil 1000 durch 8 theilbar, folglich auch 576× 1000; so darf nur gesehen werden, ob auch 424 durch 8 theilbar ist.

9) Theilt man einen Zehner, einen Hunderter, einen Tausender u. s. w. durch 9, so bleibt immer 1 als Rest: 10=9+1, 100= 99+1; 1000=999+1 u. s. w. Wird daher irgend eine Anzahl Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. durch 9 getheilt, so bleiben jedes Mal so vielmal 1 als Reste, als Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. vorhanden sind. Zählt man zu diesen Resten die Menge der Einer, so hat man eine Zahl, welche so groß ist, als die Quersumme; und ist daher die Quersumme durch 9 ohne Rest theilbar, so läßt sich auch die ganze Zahl durch 9 ohne Rest theilen. Z. B. Die Quersumme von 785691 ist = 7+8+5+6+9+1=36; 36 läßt sich durch 9 ohne Rest theilen, also ist auch 785691 durch 9 ohne Rest theilbar. Denn 785691 = (7 × 100000) + (8 × 10000) + (5×1000)+(6×100)+(9×10)+1. =(7×99999+7)+ (8×9999+8)+(5×999+5)+(6×99+6)+(9×9+9) +1. Da nun 99999, 9999, 999, 99 u. s. w. durch 9 theilbar sind; so ist die ganze Zahl durch 9 theilbar, wenn die Summe von 7+8+5+6+9+1 durch 9 theilbar ist.

10) Jede Anzahl Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. ist durch 10 ohne Rest theilbar. Steht daher in der Einerstelle eine Nulle, so ist die ganze Zahl durch 10 ohne Rest theilbar.

11) Wenn man die Werthe der einzelnen Ziffern einer Zahl, welche die Ziffern ihrer Form nach haben, also ohne Rücksicht auf ihren Stellenwerth, in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, von einander abzieht und am Ende kein Rest bleibt; so hat man die ganze Zahl in lauter Vielfache von 11 zerlegt. Denn jede Zahl, welche aus so viel Zehnern als Einern, z. B. 22, oder aus so viel Hundertern als Zehnern, z. B. 330, oder aus so viel Tausendern als Hundertern, z. B. 4400, besteht, ist ein Vielfaches von 11. Ist nun eine Zahl gegeben, z. B. 7953, so nehme ich von den Zehnern so viele zu den Einern, als diese betragen, hier also 3; vereinige ich diese 3 Zehner mit den

Einern, so erhalte ich 33, welche Zahl durch 11 theilbar ist. Von den fünf Zehnern blieben noch 2 übrig, nehme ich zu diesen 2 Hunderter, so erhalte ich 220, mithin ein Vielfaches von 11; in der dritten Stelle sind noch 7 Hunderter geblieben, welche vereinigt mit den 7 Tausendern 7700, also ein Vielfaches von 11, geben. Da nun kein Rest bleibt, so muß 11 in der ganzen Zahl ohne Rest enthalten sein. 7953 ist also zerlegt worden in 7700+220+33. Die Zahl 715 würde durch die vorgeschriebene Subtraktion zerlegt in 660+55.

12) 12 ist in jeder Zahl ohne Rest enthalten, in welcher der Faktor 2 zweimal und der Faktor 3 einmal vorkommt. Läßt sich daher eine Zahl durch 3 und durch 4 ohne Rest theilen, so ist sie auch durch 12 ohne Rest theilbar. Z. B. 46548.

Anm. Wer das bisher Vorgetragene recht verstanden hat, wird leicht auch für noch andere Zahlen Kennzeichen der Theilbarkeit finden. So ist z. B. jede Zahl durch 15 theilbar, die sich durch 3 und durch 5 ohne Rest theilen läßt; eine Zahl ist durch 25 ohne Rest theilbar, wenn 25 in ihren beiden letzten Ziffern aufgeht, u. s. w.

IV. Stufe.

§. 25.

Vorübungen zu den Zweisatzrechnungen.

Bei den Vorübungen müssen 3 Fälle Berücksichtigung finden:

1) Ein Theilverhältniß (eine Division) in ein Stammverhältniß, d. h. in ein Verhältniß, dessen erstes Glied 1 ist, zu verwandeln.

2) Ein Stammverhältniß in ein Theilverhältniß zu verwandeln, dessen erstes Glied gegeben ist.

3) Irgend ein Theilverhältniß in ein anderes zu verwandeln, dessen erstes Glied gegeben ist.

Erster Fall:

Aufg. Es sei das Verhältniß $\frac{6}{7} : \frac{5}{8}$ in ein Stammverhältniß zu verwandeln.

Aufl. Schreibe das gegebene Verhältniß hin, setze unter das erste Glied 1, und unter das zweite Glied x oder ?, wodurch das-

selbe als Frageglied, d. h. als dasjenige bezeichnet wird, welches gesucht werden soll. Die beiden Verhältnisse, welche die Aufgabe ausdrücken, werden durch einen wagerechten Strich von der darunter stehenden Auflösung getrennt.

a.
$$\frac{6}{7} : \frac{5}{8}$$
$$1 : x$$
$$\frac{6}{7} : \frac{5}{8}$$
$$6 : \frac{5 \times 7}{8}$$
$$1 : \frac{5 \times 7}{8 \times 6} = \frac{35}{48}$$

b.
$$\frac{6}{7} : \frac{5}{8}$$
$$1 : x$$
$$\frac{6}{7} : \frac{5}{8}$$
$$\frac{1}{7} : \frac{5}{8 \times 6}$$
$$1 : \frac{5 \times 7}{8 \times 6} = \frac{35}{48}.$$

c.
$$\frac{6}{7} : \frac{5}{8}$$
$$1 : x$$
$$\frac{6}{7} : \frac{5}{8}$$
$$1 : \frac{7}{6} \times \frac{5}{8} = \frac{35}{48}$$

Bei der Aufl. a. bin ich vom ersten Gliede des gegebenen Verhältnisses auf eine Zahl gegangen, die gleich dem Zähler des ersten Gliedes ist. Man erhält aus dem Bruch $\frac{6}{7}$ die Zahl 6, wenn man $\frac{6}{7}$ mit 7 vervielfacht (§. 21, 6.). Wird aber das erste Glied mit 7 vervielfacht, so muß auch das zweite mit 7 vervielfacht werden, wenn der Quotient unverändert bleiben soll (2. 13, II. c. 14). Man erhält mithin als zweites Glied des neuen Verhältnisses $\frac{5 \times 7}{8}$. Von 6 bin ich auf 1 übergegangen. Man erhält aus dem ersten Gliede 6 die Zahl 1, wenn man 6 durch 6 theilt. Wird das erste Glied durch 6 dividiert, so muß dasselbe beim zweiten Theile geschehen, wenn der Quotient unverändert bleiben soll (§. 13, II. c. 15). Man erhält also als zweites Glied $\frac{5 \times 7}{8 \times 6}$.

Bei der Aufl. b. bin ich vom ersten Gliede zuerst auf den Stammbruch $\frac{1}{7}$ und alsdann auf 1 übergegangen.

Bei Aufl. c. bin ich vom ersten Gliede des gegebenen Verhältnisses unmittelbar auf 1 übergegangen nach §. 23, a. 15. Wird aber das erste Glied durch $\frac{6}{7}$ getheilt, so muß auch das zweite Glied durch $\frac{6}{7}$ getheilt werden, und dies geschieht, wenn man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{7}{6}$ multipliziert (§. 22, Regel XXIV).

Zweiter Fall.

Aufg. Das Grundverhältniß 1 : $3\frac{5}{8}$ soll in ein anderes Verhältniß verwandelt werden, dessen erstes Glied $\frac{4}{7}$ ist.

Auflös. a. $1 : \frac{29}{8}$
$\frac{4}{7} : x$
$1 : \frac{29}{8}$
$4 : \frac{29}{2}$
$\frac{4}{7} : \frac{29}{14}$

b. $1 : \frac{29}{8}$
$\frac{4}{7} : x$
$1 : \frac{29}{8}$
$\frac{1}{7} : \frac{29}{8 \times 7}$
$\frac{4}{7} : \frac{29}{2.7} = \frac{29}{14}$

c. $1 : \frac{29}{8}$
$\frac{4}{7} : x$
$1 : \frac{29}{8}$
$\frac{4}{7} : \frac{4}{7} \times \frac{29}{8} = \frac{29}{14}$.

Dritter Fall.

1. Aufg. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{7}{9} : x$

Aufl. a. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$
$\frac{7}{9} : x$
$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$
$2 : \frac{12}{5}$
$1 : \frac{6}{5}$
$7 : \frac{42}{5}$
$\frac{7}{9} : \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$

b. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$
$\frac{7}{9} : x$
$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$
$\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$
$1 : \frac{6}{5}$
$\frac{1}{9} : \frac{6}{45}$
$\frac{7}{9} : \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$.

c. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$
$\frac{7}{9} : x$
$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$
$1 : \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$
$\frac{7}{9} : \frac{6}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{2.7}{5.3} = \frac{14}{15}$.

Bei der Auflösung wird jedes Mal auf 1 übergegangen, wenn sich nicht mit Leichtigkeit ein gemeinschaftlicher Faktor zwischen den ersten Gliedern der beiden Verhältnisse auffinden läßt. (§. 17, d. 11.)

2. Aufg. $\frac{2}{7} : \frac{4}{5} = \frac{6}{7} : x$.

Aufl. $\frac{2}{7} : \frac{4}{5}$
$\frac{6}{7} : x$
$\frac{2}{7} : \frac{4}{5}$
$\frac{6}{7} : \frac{12}{5}$

Hier ist $\frac{2}{7}$ ein Faktor von $\frac{6}{7} = 3 \times \frac{2}{7}$; es kann daher unmittelbar vom ersten Gliede des ersten Verhältnisses auf das erste Glied des zweiten Verhältnisses übergegangen werden (§. 17, d. 11).

3. Aufg. $\frac{2}{3} : \frac{7}{11} = \frac{6}{13} : x$.

Aufl. $\frac{2}{3} : \frac{7}{11}$

$\frac{6}{13} : x$

$\frac{2}{3} : \frac{7}{11}$

$2 : \frac{21}{11}$

$6 : \frac{63}{11}$

$\frac{6}{13} : \frac{63}{143}$.

Wenn die ersten Glieder der beiden Verhältnisse einen gemeinschaftlichen Faktor haben, der sich leicht als solcher erkennen läßt; so gehe man zuerst auf diesen gemeinschaftlichen Faktor und von demselben auf das erste Glied des zweiten Verhältnisses über. Hier ist der gemeinschaftliche Faktor 2; $\frac{2}{3}=2\times\frac{1}{3}$; $\frac{6}{13}=2\times\frac{3}{13}$.

Zweisatzrechnungen.

Aufgaben wie: „4 Ellen kosten 13 fl., wie viel fl. kosten 5 Ellen?" enthalten zwei Sätze. Der erste Satz „4 Ellen kosten 13 fl." enthält 2 Zahlglieder, welche beide bekannt sind; daher heißt dieser Satz: der bekannte Satz. Der zweite Satz „wie viel fl. kosten 5 Ellen?" enthält ebenfalls 2 Zahlglieder, von denen jedoch das eine unbekannt ist; dieser Satz heißt, weil er eine Frage enthält, der Fragesatz. Wer derartige Aufgaben berechnen will, muß diese beiden Sätze wohl unterscheiden und eben so das Frageglied stets im Auge behalten; auch ist es einleuchtend, daß, wer die Größe des unbekannten oder Fragegliedes bestimmen will, vom Bekannten ausgehen und das zu Bestimmende aus dem im bekannten Satze gegebenen Verhältnisse folgern muß. Geübte Rechner werden ohne weiteres Nachdenken wissen, daß 5 Ellen $\frac{5\times13}{4}$ fl. $= 16\frac{1}{4}$ fl. kosten; der Schüler wird aber erst durch einiges Nachdenken zu diesem Resultat kommen und hier den Weg betreten müssen, der bei der ersten Aufgabe des dritten Falles der Vorübungen angegeben ist. Kein Ansatz und keine Regel können dem Schüler auf dieser Stufe diesen Weg, die Beziehung auf die Einheit, unnöthig machen; sie ist für ihn das naturgemäße und daher das einzig mögliche Mittel zur Erkenntniß. Damit ist aber nicht die Nothwendigkeit ausgesprochen, immer auf die Grundeinheit, auf 1, zurückgehen zu müssen; es kann 2, 4, 6, 10, 100 oder jede andere Zahl ebenfalls als Einheit angesehen werden, sobald die zu bestimmende Zahl ein Vielfaches einer dieser Zahlen ist. Siehe die dritte Aufgabe des

dritten Falles der Vorübungen. So z. B. in der Aufgabe: 300 fl. tragen 12 fl. Zins in einem Jahre; wie viel fl. Zins tragen 400 fl. in dieser Zeit? wird der denkende Schüler auf den gemeinschaftlichen Faktor 100 übergehen und sprechen: Wenn 300 fl. in 1 Jahre 12 fl. Zins tragen, so bringen 100 fl. den dritten Theil von 12 fl., d. h. 4 fl., und 400 fl. tragen in dieser Zeit 4 × 4 fl. = 16 fl. Zins. — Bei Auflösung der Aufgabe: „Wie viel Zins tragen 1200 fl. in 1 Jahre, wenn 300 fl. in 1 Jahre 12 fl. Zins bringen?" kann unmittelbar vom ersten Gliede des bekannten Satzes auf das erste Glied des Fragesatzes übergegangen werden. 300 fl. tragen 12 fl. Zins, 1200 fl. = 4 × 300 fl. tragen 4 × 12 = 48 fl. Zins. Siehe die zweite Aufgabe des dritten Falles der Vorübungen. — Es sollen nun einige der möglichen Auflösungsarten an einem Beispiele gezeigt werden, wobei nur noch bemerkt wird, daß diese Auflösungen nicht vom Lehrer gegeben werden dürfen, sondern vom Schüler gefunden werden müssen, und daß derselbe anzuhalten ist, das Wesentliche der Aufgabe und sein Verfahren bei der Auflösung jedes Mal in Worten auszusprechen, und sowol dieses, als die Auflösungen selbst niederzuschreiben, etwa in nachstehender Form:

Fr. 4 Ellen kosten 8 fl.; wie viel fl. kosten 6 Ellen?

Auflös. a. Es ist hier nach Gulden gefragt. Der bekannte Satz heißt: 4 Ellen kosten 8 fl.; der Fragesatz heißt: wie viel fl. kosten 6 Ellen?

4 Ellen kosten 8 fl.

1 Elle kostet demnach nur den 4ten Theil von 8 fl. = 2 fl., und 6 Ellen kosten 6 × 2 fl. = 12 fl.

In dieser Aufgabe ist der Werth (Preis) einer bestimmten Anzahl Einheiten einer Waare bekannt, und es soll daraus der Werth einer größern Anzahl Einheiten derselben Waare gefolgert werden. — Ich habe zuerst aus dem Preis von 4 Ellen auf den Preis einer Elle geschlossen, indem ich gedacht habe, der 4te Theil der Waare kostet auch nur den 4ten Theil von 8 fl.; hierauf habe ich von 1 Elle auf 6 Ellen als dem Sechsfachen von 1 Elle, dem also auch das Sechsfache des Preises entspricht, geschlossen.

b. Wenn 4 Ellen 8 fl. kosten, so kosten 2 Ellen, also halb so viel Ellen als 4 Ellen, auch halb so viel fl., d. i. 4 fl.; mithin kosten 3 × 2 oder 6 Ellen 3 × 4 oder 12 fl.

Da 2 ein Vielfacher sowol von der Zahl, welche die Menge der Waareneinheiten im bekannten Satze angibt, als von der

Zahl ist, welche die Menge der Waareneinheiten im Fragesatz bezeichnet; so habe ich aus dem Preise von 4 Ellen auf den Preis von 2, als dem halben Theile von 4 Ellen, und von diesem auf den Preis von dem Dreifachen von 2 Ellen geschlossen.

c. 6 Ellen sind 1×4 Ellen $+ \frac{1}{2} \times 4$ Ellen, oder $\frac{3}{2} \times 4$ Ellen; also kosten 6 Ellen auch 1×8 fl. $+ \frac{1}{2} \times 8$ fl., oder $\frac{3}{2} \times 8$ fl. $= 8$ fl. $+ 4$ fl. $= 12$ fl.

Ich habe hier geurtheilt und geschlossen: So vielmal das bekannte Glied im Fragesatz das gleichnamige Glied im bekannten Satze in sich faßt; so vielmal muß das Frageglied das gleichnamige Glied im bekannten Satze in sich fassen.

d. Wenn 4 Ellen 8 fl. kosten, so ist die Anzahl der Gulden zweimal so groß, als die Anzahl der Ellen; also kosten 6 Ellen auch 2×6 fl. $= 12$ fl.

Ich habe gedacht: Das Frageglied muß zu dem ersten Gliede des Fragesatzes in demselben Verhältnisse stehen, wie das zweite Glied des bekannten Satzes zum ersten Gliede in diesem Satze. Da nun im bekannten Satze das zweite Glied zweimal so groß ist, als das erste; so muß auch im Fragesatze das zweite Glied zweimal so groß sein, als das erste.

Anm. Von den hier gegebenen Auflösungen wird der Schüler, welcher die oben bei den Vorübungen und in §. 17, d. 11 angegebenen drei Fälle zu unterscheiden weiß, zunächst die unter b. und d. angeführten Auflösungen wählen.

Nach und nach gewöhne man den Schüler, die gleichnamigen Glieder immer untereinander zu schreiben; so wird er endlich selbst auf eine dem sogenannten Schriftlich-Rechnen mehr entsprechende, abgekürzte Form kommen. Immer soll aber der bekannte Satz den Obersatz, der Fragesatz den Untersatz bilden, unter welchen man einen wagerechten Strich zieht. Die gegebenen Größen führe man auf einfach benannte Zahlen zurück, die sich auf einerlei Einheit beziehen: die Gewichte also auf Pfunde oder auf Lothe, die Geldsummen auf Gulden oder auf Kreuzer u. s. w. Der bekannte Satz und der Fragesatz bilden den Ansatz; und der Ansatz ist geordnet, 1) wenn die Glieder in beiden Sätzen dieselbe Benennung haben und in derselben Ordnung auf einander folgen, 2) wenn die gemischten Zahlen eingerichtet sind, und 3) wenn das Glied das letzte Glied im bekannten Satze bildet, nach dessen gleichnamigem gefragt ist.

Beginnt die Ausrechnung, so fängt man wieder mit dem bekannten Satze an; daher muß auch der bekannte Satz noch einmal unter den Strich geschrieben werden.

Die Regel für die Bildung des Ansatzes bei den Zweisatzrechnungen heißt:

XXV. **Wenn der Ansatz einer Zweisatzrechnung gebildet werden soll; so suche aus der Aufgabe das zu berechnende Zahlenglied (oder in mehrgliedrigen Zweisatzrechnungen: die zu berechnenden Zahlenglieder), schreibe dasselbe (dieselben) linker Hand an und setze rechts davon ein x oder ein Fragezeichen. Diese Glieder bilden den Fragesatz. Sodann setze über jedes Glied des Fragesatzes das Gleichnamige des bekannten Satzes nebst seiner Benennung.**

Anm. Wenn bei der Auflösung einer Aufgabe mehrere Zweisätze zu bilden sind; so kann man die verschiedenen Fragglieder mit x, y, z, oder mit x, x′, x″ oder mit x_1, x_2, x_3 u. s. w. bezeichnen.

Z. B.

Ellen	fl.
4	8
6	x
4	8
1	$\frac{8}{4}$
6	$\frac{6 \times 8}{4} = 6 \times 2 = 12$ fl.

Oder:

Ellen	fl.
4	8
6	?
4	$\frac{8 \times 3}{2} = 4 \times 3 = 12$ fl.
2	
6	

Anm. 1. Haben die Schüler viele Aufgaben der Art berechnet, so frage man, wie viele bekannte Zahlen in der berechneten Aufgabe vorkommen, wie diese 3 Zahlen heißen, wie die Zahl heiße, welche sie gefunden haben, und wie sie diese vierte Zahl aus den drei bekannten gefunden. Sollte ein Schüler die Regel aufstellen wollen, daß man das vierte Glied finde, wenn man das zweite Glied des bekannten Satzes mit dem ersten Glied des Fragesatzes vervielfache, und dieses Produkt durch das erste Glied theile; so gebe man ihm eine Arbeitsrechnung aufzulösen, und er wird einsehen, daß diese Regel nicht allgemein gültig ist. Ueberhaupt sei hier ein- für allemal bemerkt, daß man die Anwendung einer Regel nur dann gestatten dürfe, wenn der Schüler die Richtigkeit derselben

aus Gründen nachzuweisen vermag und zugleich darthun kann, daß die betreffende Aufgabe zu den Fällen gehört, welche der Regel unterliegen. Siehe §. 31.

Anm. 2. Dreisatz- oder Regeldetri-Rechnungen wurden diese Rechnungen früher deßwegen genannt, weil drei bekannte Glieder in der Aufgabe vorkommen. Der Name Zweisatzrechnung verdient vor allen andern Benennungen den Vorzug; denn es ist bei diesen Rechnungen nothwendig, daß man die beiden darin vorkommenden Sätze (den bekannten Satz und den Fragesatz) wohl ins Auge fasse, und der Name Zweisatzrechnung veranlaßt hiezu. Ist aber irgend eine Aufgabe gegeben; so ist auch immer zu untersuchen, ob es eine Zweisatzrechnung ist. Es sei z. B. die Aufgabe gegeben: „ein frei fallender Körper hat in der ersten Sekunde einen Weg von 15′ zurückgelegt; welchen Raum wird er in den 3 ersten Sekunden durchfallen?" — so wird diese Aufgabe nicht als eine Zweisatzaufgabe angesehen und behandelt werden können, und zwar deßhalb nicht, weil der frei fallende Körper nicht in jeder folgenden Sekunde einen gleich großen Weg zurücklegt, sondern einen desto größern, je länger er schon im Fallen begriffen ist. Es verhalten sich, wie die Physik lehrt, die Räume, wie die Quadrate der Zeiten.

Anm. 3. Bei jeder Auflösung, der Schüler mag sie mit oder ohne Anleitung des Lehrers gefunden haben, ist es nothwendig, sich zu überzeugen, ob jeder einzelne Punkt der Aufgabe vollkommen eingesehen wird. Spricht z. B. der Schüler: Wenn 5 Ellen $^2/_3$ fl. kosten, so kostet 1 Elle den fünften Theil von $^2/_3$ fl.; — so überzeuge man sich, ob er auch einsieht, daß 1 Elle deßwegen den fünften Theil kostet, weil 1 Elle der fünfte Theil von 5 Ellen ist. Heißt es ferner: der 5te Theil von $^2/_3$ fl. ist $^2/_{15}$ fl.; so frage man, durch welche Rechnungsart $^2/_{15}$ fl. gefunden wurden, welches der Theiler, welches die Theilungszahl war, und welches Verfahren angewendet wurde, um $^2/_3$ durch 5 zu theilen. Denn wenn auch früher schon erkannt wurde, daß ein Bruch durch eine ganze Zahl getheilt wird, wenn man den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl vervielfacht; so sehe man doch nach, ob dies dem Schüler jetzt, im Augenblicke der Anwendung, noch klar ist. Eben so ist es nothwendig, einzusehen, durch welche Rechnungsart das Resultat $^2/_{15}$ fl. gefunden wurde; den $^1/_5 \times ^2/_3$ fl. ist auch gleich $^2/_{15}$ fl. Das vorzüglichste Mittel, den Schüler dahin zu führen, daß er sich jedes Schrittes deutlich bewußt werde, ist, ihn anzuleiten, in jedem Falle deutlich auszusprechen: 1) was gegeben oder vorausgesetzt ist; 2) was berechnet oder gefolgert werden soll; 3) wie (durch welche Mittel, durch Anwendung welcher vorhergegangenen Sätze) aus dem Gegebenen das Gesuchte abgeleitet oder gefolgert wurde. An der Sprache des Schülers kann der Lehrer auch am leichtesten erkennen, bis zu welchem Grade der Entwicklung die Urtheilskraft

des Schülers gefördert, ob er zur Erkenntniß des vorliegenden Falles gekommen und wie weit seine Sprachbildung vorangeschritten ist.

Anm. 4. Die Mehrzahl der im „Rechenunterrichte" vorkommenden Zweisatzrechnungen kann ohne Ziffern berechnet werden; die Bestimmung, bei welchen Aufgaben die Ziffern benützt werden dürfen, muß den Lehrern überlassen bleiben. Sin die Schüler gut unterrichtet worden; so kann man ihnen selbst überlassen, ob sie mit oder ohne Ziffern die vorgelegte Aufgabe berechnen wollen. Sie werden bei den meisten Aufgaben das Rechnen ohne Ziffern wählen.

Noch muß bemerkt werden, daß der „Rechenunterricht" eine hinreichende Menge von Aufgaben bietet, sobald man nur bedenkt, daß jede Aufgabe Stoff zu so vielen Aufgaben gibt, als sie Zahlglieder enthält. Man führe, sobald das ursprüngliche Frageglied berechnet ist, dasselbe als bekanntes Glied in die Rechnung ein und mache nach und nach jedes der ursprünglich bekannten Glieder zum Frageglied. So kann man z. B. aus der Aufgabe: „4 Ellen kosten 8 fl.; wie viel fl. kosten 6 Ellen", sobald sie gelöst ist, noch nachstehende 3 Aufgaben bilden:

1) 6 Ellen kosten 12 fl.; wie viel fl. kosten demnach 4 Ellen?
2) Für 8 fl. bekommt man 4 Ellen; wie viele Ellen bekommt man für 12 fl.?
3) Für 12 fl. bekommt man 6 Ellen; wie viele Ellen bekommt man um 8 fl.?

Es wird kaum der Bemerkung bedürfen, daß dieses Verfahren vom besten Erfolg sein wird, und daß auch die Schüler anzuweisen sind, bei den Aufgaben im „Rechenunterrichte" abwechselnd jedes Glied zum Frageglied zu machen. — Auch lasse man die Aufgaben, und wenn verschiedene Auflösungen vorkamen, auch die Auflösungen mit einander vergleichen, d. h. angeben, worin sie mit einander übereinkommen und wodurch sie sich unterscheiden.

Es folgen nun die Antworten und Auflösungen.*)

A. Aufgaben verschiedenen Inhaltes.

a.

1) 12 fl. 2) $13\frac{1}{3}$ fl. 3) 6 fl. 4) $3\frac{3}{5}$ fl. 5) $10\frac{2}{7}$ fl. 6) 50 fl. 7) 376 fl. 8) $175\frac{1}{2}$ fl. 9) $186\frac{6}{7}$ fl. 10) 384 fl.

b.

1) 2400 Pfd. 2) $637\frac{1}{2}$ Ztnr. 3) 91 Ellen. 4) 12 Ellen. 5) 60 Ohm. 6) 521 fl. 6 Kzr. 7) 147 fl. 8) 15 Franken = 7 fl.; 36 Fünffrankenthaler = 84 fl.; 600 Franken = 280 fl.

---

*) Die Auflösungen sind nur da weggelassen, wo sie nach dem Vorangegangenen durchaus keine Schwierigkeiten mehr bieten können.

c.

1) 2 fl. 2) $3\frac{3}{4}$ fl. 3) $1\frac{1}{24}$ fl. 4) $2\frac{1}{45}$ fl. 5) 48 fl.

6) a. $\frac{3}{4}$ Ellen kosten 7 fl.;
$\frac{1}{4}$ Elle kostet $\frac{7}{3}$ fl.;
1 „ „ $\frac{4\times7}{3}$ fl. $= \frac{28}{3}$ fl.
5 Ellen kosten $\frac{5\times28}{3}$ fl. $= \frac{140}{3}$ fl. $= 46\frac{2}{3}$ fl.

b. $\frac{3}{4}$ Ellen = 7 fl.
3 „ $= 4\times7$ fl.
1 „ $= \frac{4\times7}{3}$ fl.
5 „ $= \frac{5\times28}{3}$ fl.

c. $\frac{3}{4}$ Ellen = 7 fl.
1 Elle $= \frac{4}{3}\times7$ fl.
5 Ellen $= 5\times\frac{4}{3}\times7$ fl. $= 46\frac{2}{3}$ fl.

Vergl. §. 25 Vorübungen den 1ten und 2ten Fall.

Anm. Das Gleichheitszeichen bezeichnet in den vorstehenden Fällen die Werthgleichheit.

7) $28\frac{4}{5}$ fl. 8) $1\frac{5}{16}$ fl. 9) $2\frac{3}{16}$ fl. 10) $4\frac{1}{2}$ fl. 11) $7\frac{1}{5}$ fl. 12) $2\frac{2}{3}$ fl. 13) $\frac{3}{4}$ fl. 14) $\frac{3}{20}$ fl.

15) Ellen fl.
$\frac{2}{3} = \frac{3}{4}$
$\frac{5}{8} = ?$

Ellen fl.

$\frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ oder: $\frac{2}{3} = \frac{3\times3\times5}{2\times4\times8} = \frac{45}{64}$. $\frac{3\times3\times5}{4\times2\times8} = \frac{45}{64}$.
$\frac{1}{3} = \frac{3}{8}$ 1 =
$1 = \frac{9}{8}$ $\frac{5}{8} =$
$\frac{1}{8} = \frac{9}{64}$
$\frac{5}{8} = \frac{45}{64}$

Ich habe zuerst das zu berechnende Zahlenglied, d. h. die Zahl, welche die Menge der Einheiten angibt, deren Werth bestimmt werden soll, ins Auge gefaßt und diese Zahl zum ersten Gliede des Fragesatzes genommen; rechts davon habe ich durch ein Fragezeichen das Frageglied bezeichnet. Die Zahl, welche die Anzahl der Einheiten angibt, deren Preis bestimmt ist, bildete mit der Zahl, welche diesen Preis ausdrückt, die Glieder des bekannten Satzes.

Anm. Auch bei der mündlichen Berechnung halte man strenge darauf, daß die Glieder des bekannten Satzes in der Ordnung auf einander folgen, daß das Glied, nach dessen gleichnamigem gefragt ist, zuletzt gesprochen wird. Die Glieder des Fragesatzes müssen in derselben Ordnung auf einander folgen, in der die Glieder des bekannten Satzes stehen.

Abgesehen davon, daß durch pünktliche Einhaltung dieser Ordnung die Rechnung meistentheils sehr erleichtert wird, muß der Schüler angehalten werden, überall eine feste Ordnung zu beobachten, wenn er überhaupt an Ordnung gewöhnt werden soll.

16) $\frac{7}{8}$ fl. 17) 10 Kr. = 27 fl.; $\frac{5}{9}$ Kr. $= 1\frac{1}{2}$ fl. 18) $\frac{5}{7}$ pr. Thlr. $= 1\frac{1}{4}$ fl. 19) 15 Franken = 7 fl.; 1 Fr. = 28 Kzr.; $\frac{5}{7}$ Fr. = 20 Kzr.

d.

Gemischte Zahlen werden gewöhnlich vor der weitern Berechnung in unächte Brüche verwandelt.

1) 8 fl. 2) $3\frac{1}{3}$ fl. 3) $\frac{5}{7}$ fl. 4) $2\frac{1}{4}$ fl. 5) $1\frac{4}{7}$ fl. 6) $19\frac{3}{4}$ fl.

e.

1) 5 Ohm = $\frac{1}{2}$ Fdr. kosten 54 fl.;
1 Fdr. kostet 2×54 fl. = 108 fl.
7 Fdr. kosten 7×108 fl. = 756 fl.

Oder: 5 Ohm kosten 54 fl.;
also kostet 1 Ohm $\frac{54}{5}$ fl.
und 7 Fdr., welches 70 Ohm sind, $\frac{70 \times 54}{5}$ fl. = 756 fl.

Anm. Sind die entsprechenden Glieder in den beiden Sätzen nicht gleichnamig, so müssen sie vor der Berechnung der Aufgabe gleichnamig gemacht werden.

2) 2 fl. $42\frac{1}{2}$ Kzr. 3) $21\frac{3}{14}$ fl. 4) $292\frac{4}{7}$ fl. 5) $38\frac{2}{25}$ fl. 6) $2621\frac{3}{5}$ fl. 7) 1 fl. $41\frac{3}{4}$ Kzr. 8) 33 fl. 29 Kzr. 9) 34 fl. 10) $16\frac{2}{3}$ fl. 11) $18\frac{2}{3}$ fl. 12) $1\frac{3}{5}$ fl. 13) $6\frac{2}{5}$ fl. 14) 1 fl. 15) 1 fl. $42\frac{2}{3}$ Kzr. 16) 7 fl. 28 Kzr. 17) $146\frac{2}{9}$ fl. 18) 2000 fl.

f.

1) 5 fl. 2) 80 Pfd.

3) Das Frageglied ist Pfd.; will man folglich vom Bekannten ausgehen, so muß man mit fl. anfangen.

48 Kzr. = $\frac{4}{5}$ fl.; 4 fl. 48 Kzr. = $\frac{24}{5}$ fl.
Um $\frac{4}{5}$ fl. bekommt man 5 Pfd.;
folglich bekommt man um $\frac{24}{5}$ fl. = $\frac{6 \times 4}{5}$ fl. auch 6×5 Pfd. = 30 Pfd.

Oder: Um 48 Kzr. bekommt man 5 Pfd.
um 1 " " " $\frac{5}{48}$ "
und um 288 " " " $\frac{288 \times 5}{48}$ Pfd. = 30 Pfd.

Oder: Für 2 Sechsbätzner erhält man 5 Pfd.; folglich erhält man für 12 Sechsbätzner 6×5 Pfd. = 30 Pfd.

Oder: Wenn man um 48 Kzr. = 8 Sechser = $\frac{8}{10}$ fl., 5 Pfd. bekommt, so erhält man für 4 fl. 48 Kzr. = 48 Sechser = $\frac{48}{10}$ fl., also für 6 Mal so viel Geld, auch 6 Mal so viel Waare; mithin 6×5 Pfd. = 30 Pfd.

4) $33\frac{1}{3}$ Pfd. 5) $11\frac{2}{3}$ Pfd. 6) 72 fl. 55 Kzr. 7) 105 Pfd. 8) 15 Pfd. 25 Lth. 9) 109 Pfd. $9\frac{39}{41}$ Lth. 10) 75 Ztnr. 69 Pfd. $18\frac{10566}{22757}$ Lth. 11) $6\frac{17}{120}$ fl. 12) 10 Fdr. 7 Ohm 6 Stützen.

	𝔅	fl.
13) a.	7895 =	$\frac{7889}{120}$
	135907 =	x

x = 1131 fl. $41\frac{13533}{15790}$ Kzr.

	fl.		pr. Thlr.
b.	7	=	4
	$\frac{1072170323}{947400}$	=	x′

x′ = 646 pr. Thlr. $20\frac{4189}{7895}$ Sgr.

14) 428307 fl. $8\frac{47249}{52097}$ Kzr.

g.

1) Kosten $\frac{2}{5}$ der Waare 80 fl.; so
   „ $\frac{5}{5}$ „ „ 200 fl.

2) $3\frac{3}{10}$ fl. 3) 2 fl. $27\frac{69}{73}$ Kzr. 4) 480 Pfd. 5) a. 1182 fl. b. 886 fl. 30 Kzr. 6) a. 390 fl. b. $7\frac{4}{5}$ Kzr.

Anm. Der Lehrer gebe viele Aufgaben, in denen aus dem Preis einer Ohm der Preis der Stütze und der Maß gefolgert werden muß, so daß die Schüler endlich die Regel finden: So viel fl. die Ohm kostet, so viel $^1/_{10}$ fl. kostet die Stütze und so vielmal $^3/_5$ Kzr. kostet die Maß.

B. Arbeitsrechnungen.

1) Wenn 2 Arbeiter 4 Tage zu einem Geschäfte brauchen; so brauchen 6 Arbeiter nur den dritten Theil dieser Zeit, das sind $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ Tag zu diesem Geschäfte.

2) $7\frac{1}{2}$ Tage. 3) 6 Arbeiter. 4) $1\frac{1}{2}$ Tage. 5) 9 Tage. 6) $4\frac{1}{3}$ Tage. 7) 20 Arbeiter. 8) 8 Arb. 9) 7 Arb. 10) 10 Arb. 11) 2 Tge. 12 Stdn., den Tag zu 24 Stdn. gerechnet. 12) 9° 6′.

C. Zinsrechnungen.

Derjenige, welcher einem Andern Geld leihet, heißt Gläubiger oder Kreditor; derjenige, welcher Geld entlehnt, heißt Schuldner oder Debitor; das ausgeliehene Geld nennt man das Kapital, und das Geld, welches für die Benützung des Kapitals bezahlt wird, den Zins oder die Interessen. Im Allgemeinen versteht man unter Zins das Geld, welches für die Benützung eines fremden Eigenthums (Häuser, Grundstücke, Kapitale u. s. w.) nach einer festgesetzten Zeit bezahlt wird; man spricht daher auch von Hauszins, Grundzins u. s. w. Gewöhnlich wird bestimmt, wie viel der Schuldner von jedem 100 der geliehenen Summe für die Zeit eines Jahres zu bezahlen hat, welche Bestimmung der Zinsfuß genannt wird; daher

sagt man, das Kapital ist zu $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5 vom Hundert (v. H.) oder pro Cent, d. h. von 100 (pro cento, prc., %) ausgeliehen. Der Tag, an welchem das Kapital geliehen wurde, wird bei der Berechnung des Zinses für einen ganzen, der Tag, an dem es zurückbezahlt wird, aber gar nicht gerechnet.

1) a. 3 Kzr. b. $\frac{1}{2}$ fl. c. 2 fl.

2) Es ist in dieser Aufgabe nach Zins gefragt. Der bekannte Satz (Bedingungssatz) heißt: Von 100 fl. Kapital erhält man 5 fl. Zins. Der Fragesatz heißt: Wie viel fl. Zins erhält man von 720 fl. Kapital? Man lasse anschreiben: V. H. oder prc. = 5 fl.; K. = 720 fl.; Z. = x.

Von 100 fl. Kapital erhält man 5 fl. Zins;
" 10 fl. " " " $\frac{5}{10}$ fl. = $\frac{1}{2}$ fl. Zins;
" 72×10=720 fl. Kapital erhält man 72×$\frac{1}{2}$fl.=36 fl. Zins.

Es war in dieser Aufgabe das Verhältniß des Kapitals zum jährlichen Zinse und die Größe des wirklichen Kapitals gegeben; die Größe des jährlichen Zinses sollte berechnet werden. — Ich habe zuerst das Frageglied, den bekannten Satz und den Fragesatz ins Auge gefaßt; alsdann die Auflösung mit dem bekannten Satze und zwar mit dem Zahlgliede des bekannten Satzes begonnen, dessen gleichnamiges Glied im Fragesatz bestimmt ist; hierauf habe ich das erste Glied des bekannten Satzes in eine Zahl zu verwandeln gesucht, von der leicht auf das bekannte Glied des Fragesatzes (als auf ein Vielfaches dieser Zahl) geschlossen werden konnte, und so hat die entsprechende Veränderung des zweiten Gliedes des bekannten Satzes zu dem verlangten Ergebnisse geführt.

3) 5 fl. Zins erhält man von 100 fl. Kap., 10×5 fl. = 50 fl. Zins erhält man von 10 × 100 fl. = 1000 fl. Kap.

4) 1200 fl. 5) $37\frac{41}{400}$ fl.

6) fl. Kap. fl. Zins 7) 850 fl.

$612\frac{1}{2}$ $30\frac{5}{8}$
100 x.

x = 5 fl.

8) Zu $4\frac{1}{2}$ v. H. bringt ein gewisses Kapital jährlich 72 fl. Zinsen ein; nähme man nur $\frac{1}{2}$ v. H., so würde dasselbe Kapital nur $\frac{72}{9}$ fl. = 8 fl. Zins tragen; nimmt man aber $\frac{10}{2}$ = 5 v. H., so erhält man von demselben Kapital 10×8 fl. = 80 fl. Zinsen.

9) 6600 fl. 10) 2000 fl. 11) 12000 fl.

12)

fl. Kap.	fl. Zins
480	24
100	x

x = 5 fl.

b.

1)

fl. Kap.	fl. Kap. u. Zins
100	105
800	x

x = 840 fl.

2)

fl. Kap. u. Zins	fl. Kap.
105	100
6720	x

x = 6400 fl.

3) $4\frac{1}{2}$ v. H. 4) 5 fl. 15 Kzr.

5) Wenn man täglich 2 fl. verzehrt, so braucht man in einem Jahre 365 × 2 fl. = 730 fl.

Will man 5 fl. Zins, so muß man 100 fl. Kap. ausstellen;
" " 10 fl. " " " " 200 fl. " " ;
" " 730 fl. " " " " 14600 fl. " " .

6) a. 10950 fl. b. 21900 fl. c. 12775 fl.

7) a. Will man von einem Kapital 539 fl. Zins, so muß man es zu $3\frac{1}{2}$ v. H. ausstellen; will man von demselben Kapital in dieser Zeit 616 fl. Zins erhalten, so muß man es zu 4 v. H. ausstellen.

b. $3\frac{1}{2}$ fl. Zins erhält man von 100 fl. Kapital;
539 fl. " " " " 15400 fl. " .

8) a.

fl. Zins	v. H.
260	4
320	x

$x = 4\frac{12}{13}$ fl.

b. 320 fl. — 260 fl. = 60 fl.

fl. Zins	fl. Kap.
4	100
60	x′

x′ = 1500 fl.

9) Zu $4\frac{1}{2}$ v. H. trägt ein Kapital eine gewisse Summe Zins in 5 Jahren; wird dasselbe Kap. zu $3\frac{3}{4}$ v. H. ausgestellt, so trägt es dieselbe Summe Zins in $5\frac{2}{3}$ Jahren.

10) In $5\frac{1}{2}$ Jahren trägt ein Kapital eine gewisse Summe Zins, wenn es zu 4 v. H. ausgestellt ist; in 4 Jahren trägt dasselbe Kapital dieselbe Summe Zins, wenn man $5\frac{1}{2}$ v. H. nimmt.

11) a.

fl. Kap. u. Zins	fl. Kap.
105	100
882	x

x = 840 fl.

b. 882 fl. — 840 fl. = 42 fl.

12) a. 47 fl. b. 1175 fl. Kap. 13) a. 1000 fl. b. 900 fl. 14) 169 fl. 36 Kzr.

15) fl. Zins Jahr

	fl. Zins	Jahr	
a.	$4\frac{3}{4}$	1	b. 25 Jahre. c. $22\frac{2}{9}$ Jahre.
	100	x	d. 20 Jahre.

$x = 21\frac{1}{19}$ Jahr.

16) 378 fl.

17) fl. Kap. u. Zins fl. Kap.

fl. Kap. u. Zins	fl. Kap.
145	100
2175	x

$x = 1500$ fl.

18) a. $6054\frac{114}{209}$ fl. Kap. b. $272\frac{95}{209}$ fl. Zins.

Anm. Ist ein Kapital zu 5 v. H. ausgestellt, so erhält man die Zinsen, wenn man das gegebene Kapital durch 20 theilt; sind die Zinsen bekannt, so erhält man das Kapital, wenn man die Summe der Zinsen mit 20 vervielfacht. Ist ein Kapital zu 4 v. H. ausgestellt, so erhält man die Zinsen, wenn man das gegebene Kapital durch 25 theilt; sind die Zinsen bekannt, so findet man die Größe des Kapitals, wenn man die Summe der Zinsen mit 25 multiplizirt.

D. Abzugs- oder Rabatt-Rechnungen.

Wenn ein Schuldner in Folge des mit dem Gläubiger geschlossenen Vertrages erst in einer bestimmten Zeit seiner Zahlungsverbindlichkeit Genüge zu thun hat, und dennoch früher bezahlt; so kann er eine Vergütung ansprechen, welche der Zeit, um welche er früher, als bedungen war, bezahlt hat, angemessen ist. Ist z. B. A. dem B. eine Summe Geldes nach Ablauf einer bestimmten Zeit zu bezahlen schuldig, ohne zu einer Verzinsung dieser Summe während dieser Zeit verpflichtet zu sein; so kann A. das Geld bis zum Ablauf der festgesetzten Zeit zu seinem Nutzen verwenden, und will B. das Geld früher, so muß er dem A. einen Abzug gestatten, als Vergütung für die entbehrte Benützung. Diesen Abzug nennt man gewöhnlich Interusurium oder Rabatt, die nach Ablauf der bestimmten Zeit zu bezahlende Summe den künftigen Werth oder die Schuldsumme, die Summe, welche vor Ablauf der festgesetzten Zeit (Verfallzeit, Zahlungsfrist) bezahlt wird, den baaren oder gegenwärtigen Werth oder auch die Baarzahlung. Um den gegenwärtigen Werth zu bestimmen, berechnet man, wie viel bei der Vorausbezahlung der Gläubiger zu empfangen habe, damit, wenn er das

Empfangene auf Zinsen legt, das nach Ablauf der ursprünglich festgesetzten Zeit angewachsene Kapital dem Betrag seiner Forderung gleichkomme *). Hätte z. B. B. nach 1 Jahre 105 fl. zu bekommen, so wäre der gegenwärtige Werth seiner Forderung, wenn 5 v. H. jährlicher Abzug (Rabatt) gerechnet wird, 100 fl. Kaufleute pflegen bei der Bestimmung des gegenwärtigen Werthes von einem andern Gesichtspunkte auszugehen; sie berechnen nämlich, wie viel der Schuldner, wenn er früher bezahlt, abziehen dürfe, um sich für die Zinsen zu entschädigen, welche er zu dem angenommenen Zinsfuße aus dem Kapital hätte ziehen können, wenn er nach Ablauf der ursprünglich festgesetzten Zeit und nicht früher bezahlt hätte. Im Handel, bei Waarenbezahlungen und Wechseln werden daher die dem bedungenen Zinsfuße und der Zeit, um welche früher als vertragmäßig bezahlt wurde, entsprechenden Zinsen von der Schuldsumme abgezogen. Wäre also Jemand 100 fl. nach einem Jahr zu bezahlen schuldig, so wäre die baare Zahlung, wenn 5 v. H. gerechnet werden, 95 fl.; betrüge der künftige Werth nach einem Jahre 105 fl., so würde der baare Werth nur $99\frac{3}{4}$ fl. betragen.

Obgleich die erste Art, den gegenwärtigen Werth zu bestimmen, die Berechnung auf Hundert, die allein richtige ist, so ist dennoch im Handel fast durchgängig die Berechnung in Hundert im Gebrauch, weil diese Berechnungsart die leichtere ist; ferner ist, da im Handel gewöhnlich nur kurze Fristen vorkommen, der Unterschied der Resultate bei beiden Berechnungen unbedeutend, und zudem wird der kleine Nachtheil, welcher auf der einen Seite durch die Berechnung des Rabatts in 100 entsteht, gegen den Vortheil der baaren Zahlung wenig geachtet.

---

*) Diese Ansicht, daß der Abzug so viel zu betragen habe, daß, wenn der Empfänger das (nach geschehenem Abzuge) vor der Verfallzeit baar erhaltene Geld auf Zinsen ausleiht bis zu dem Zeitpunkte, wo er ohnedies die Zahlung erhalten sollte, Kapital und Zinsen der dann zu erhaltenden Summe gleich werde, ist als Grundlage dieser Rechnungen anzunehmen. Dieses Interusurium heißt das einfache oder Hofmann'sche, oder das zusammengesetzte oder Leibnitz'sche, je nachdem man annimmt, daß der Empfänger sein Geld zu einfachen oder zu Zinseszinsen (§. 32) benützen kann oder will oder soll. — Der Abzug an Waarenzahlungen (der Waarenrabatt) ist weiter Nichts, als eine Verwilligung eines geringern Preises der Waare in Prozenten ausgedrückt.

Die Benennungen auf Hundert und in Hundert gründen sich darauf, daß bei der ersten Berechnungsart ein Glied des bekannten Satzes aus der Summe der Kapitaleinheit (100) und des Zinsfußes (5, $4\frac{1}{2}$, 4 u. s. w.) besteht, und daher 105, $104\frac{1}{2}$, 104 u. s. w. heißt; bei der zweiten Berechnungsart ist der Zinsfuß schon in der Zahl 100 enthalten, und man findet also das eine Glied des bekannten Satzes (95, $95\frac{1}{2}$, 96 u. s. w.), wenn man 5, $4\frac{1}{2}$, 4 u. s. w. von 100 abzieht.

Im Handel wird häufig der Rabatt Disconto oder Sconto genannt. Einen Wechsel (siehe „Rechenunterricht" §. 39) discontieren heißt, die darin benannte Summe vor der Verfallzeit nach Abzug des verabredeten Minderbetrages bezahlen.

Anm. Um den Unterschied zwischen Rabatt auf 100 und Rabatt in 100 einzusehen, berechne man, was A dem B jetzt, nach Abzug von 5 pCt. für jedes Jahr baar zu bezahlen hätte, wenn er nach 20 Jahren 1000 fl. zu bezahlen schuldig wäre; a) wenn Rabatt auf 100, b) wenn Rabatt in 100 gerechnet wird.

---

1) Wenn man nach einem Jahre 105 fl. schuldig wäre, so würde man jetzt 100 fl. bezahlen; man ist aber nach einem Jahre $3 \times$ 105 fl. = 315 fl. schuldig, also muß man jetzt 3×100 fl. = 300 fl. bezahlen.

In dieser Aufgabe ist der künftige Werth und das Verhältniß des Abzuges zur Baarzahlung gegeben, und es soll die Größe der Baarzahlung gesucht werden. Ich habe aus dem Verhältnisse des Abzuges zur Baarzahlung das Verhältniß des künftigen Werthes zur Baarzahlung gesucht und in bestimmten Zahlen ausgedrückt, und aus diesem Verhältnisse und dem angegebenen künftigen Werthe auf die Größe der Baarzahlung geschlossen.

2) Statt 105 fl. nach einem Jahre bezahlt man 100 fl. baar;
statt 504 „ „ „ „ „ „ 480 „ „.

3) a. 2000 fl. b. 100 fl. 4) 600 fl.

5) Statt 115 fl. nach 3 Jahren, bezahlt man 100 fl. baar;
statt 920 „ „ „ „, „ „ 800 „ „.

6) fl. Schuldsumme. fl. Baarzahlung. 7) fl. (n. 6 Mon.) fl. (baar)

fl. Schuldsumme	fl. Baarzahlung	fl. (n. 6 Mon.)	fl. (baar)
124	100	$102\frac{1}{2}$	100
372	x	827	x
x = 300 fl.		x = $806\frac{34}{41}$ fl.	

8) Beträgt der Abzug in 1 Monat $\frac{1}{2}$ v. H.; so beträgt er in 3

Monaten $\frac{3}{2}$ v. H. Darf A. von 100 fl. $\frac{3}{2}$ fl. abziehen; so darf er von 1200 fl. 12 × $\frac{3}{2}$ fl. = 18 fl. abziehen; also bezahlt er baar 1200 fl. — 18 fl. = 1182 fl.

9)

fl.	fl. Diskonto
100	$\frac{3}{4}$
1800	x

x = $13\frac{1}{2}$

$1800 - 13\frac{1}{2} = 1786\frac{1}{2}$ fl.

10) 6000 fl. — 120 fl. = 5880 fl.

11) Beträgt der Abzug in 12 Monaten 6 v. H., so beträgt er in 15 Monaten $7\frac{1}{2}$ v. H.

fl. (n. 15 Mon.)	fl. (baar)
$107\frac{1}{2}$	100
2146	x

x = $1996\frac{12}{43}$ fl.

2146 fl. — $1996\frac{12}{43}$ fl. = $149\frac{31}{43}$ fl.

12)

fl. Abzug	fl.
$4\frac{1}{2}$	100
90	x

x = 2000 fl.

13)

fl.	fl. Abzug
100	5
2500	x

x = 125 fl.; 2500 fl. — 125 fl. = 2375 fl.

14) 2400 fl. — 2000 fl. = 400 fl. Werden bei einer Baarzahlung von 2000 fl. 400 fl. abgezogen, so beträgt bei einer Baarzahlung von 100 fl. der Abzug 20 fl. Beträgt der Abzug 5 v. H. in 1 Jahre, so beträgt er 20 v. H. in 4 Jahren.

Oder: Der Gläubiger muß die Baarzahlung so lang in Händen haben, bis dieselbe 400 fl. Zins getragen. Tragen 2000 fl. 400 fl. Zins, so tragen 100 fl. 20 fl. Zins. Erhält man 5 fl. Zins v. H. in 1 Jahre, so erhält man 20 fl. Zins in 4 Jahren; mithin ist 4 Jahre vorausbezahlt worden, da 400 fl. Rabatt gerechnet wurden.

15) 1000 fl. — 900 fl. = 100 fl. Wurden bei baarer Zahlung für 2 Jahre 100 fl. abgezogen, so betrug der Abzug für 1 Jahr 50 fl. Ist die Baarzahlung 900 fl.; so beträgt der Abzug in einem Jahre 50 fl.; bei einer Baarzahlung von 100 fl. würde demnach der Abzug $5\frac{5}{9}$ fl. betragen. — Man findet dasselbe Ergebniß, wenn man berechnet, zu wie viel v. H. der Gläubiger

die Baarzahlung ausstellen muß, um in 2 Jahren 100 fl. Zins zu erhalten.

E. Vermischte Aufgaben.

a.

1) Ell. br. Ellen Tuch

$\frac{3}{4}$	13
$1\frac{1}{2}$	x

x = $6\frac{1}{2}$ Ellen.

2) Kostet das Mltr. 8 fl., so wiegt das Brod 12 Loth;
" " " 10 " " " " " x " ?

x = $9\frac{3}{5}$ Loth.

3) 8 Wochen. 4) 150 Ellen. 5) 5 Ruthen breit. 6) $1\frac{5}{8}$ fl. 7) $1\frac{1}{2}$ Kzr. 8) $15\frac{9}{10}$ Kzr. 9) 152 pr. Thlr. 10) 241 fl. $28\frac{1}{2}$ Kzr.

11) Hat man für eine gewisse Summe Geld 50 junge Bäume, so steht das Stück auf $22\frac{1}{2}$ Kzr.; hat man für dieselbe Summe Geld nur 45 Bäumchen, so steht das Stück auf 25 Kzr.

12) Die Einlagen sind gleich, also kann sich der Gewinn nur nach der Zeit richten. Da A. 12 Monate, B. 10 Monate lang sein Geld in dem Geschäfte gelassen hat, so kann man annehmen, 385 fl. wären in 12 + 10 = 22 Monaten gewonnen worden. Man setze daher die Summe der Zeiten zur Summe der Gewinnste ins Verhältniß.

Mon.	fl.	
22	385	A. gewinnt 210 fl.; der Gewinn des B.
13	x	ist also 385 fl. — 210 fl. = 175 fl.

x = 210 fl.

Oder: Der Gewinn des A. verhält sich zum Gewinn des B. wie 12 zu 10, oder wie 6 zu 5. Kommen auf 11 Theile 385 fl. Gewinn; so kommen auf 6 Theile 210 fl. und auf 5 Theile 175 fl.

b.

1) Ist der Schatten 6′ lang, so ist die wahre Größe des Gegenstandes = 5′; ist der Schatten 20′ lang, so ist die wahre Größe des Gegenstandes = $16\frac{2}{3}$ Fuß.

2) Die Länge der Linie von der äußern Mauer bis in die Mitte des

Thurmes muß zu der Länge des Schattens gezählt werden; also $234' + 16' = 250'$.

Länge des Schattens	Höhe des Gegenstandes
$6\frac{2}{3}'$	$4\frac{1}{5}'$
250	x

$$x = 157\tfrac{1}{2}'.$$

3) Bringt man die Kugel mit 1 Wurfe 40 Schritte weit, so muß man 6 Mal werfen, um ein gewisses Ziel zu erreichen; bringt man die Kugel mit 1 Wurfe nur 30 Schritte weit, so muß man 8 Mal werfen, um dasselbe Ziel zu erreichen.

4)

Entfernung	Bäume
8′	1200
12′	x

x = 800 Bäume.

5) Reicht eine gewisse Summe Geldes 52 Wochen, so werden wöchentlich 15 fl. gebraucht; reicht dieselbe Summe 60 Wochen, so werden wöchentlich 13 fl. gebraucht.

6)

Mon.	Mann
$5\frac{1}{2}$	16800
12	x

x = 7700.

16800—7700=9100; also muß die Besatzung um 9100 Mann vermindert werden.

7) Sind es 8000 Mann, so bekommt 1 Mann 2 Pfd. Brot;
" " 8700 " , " " 1 " 1 " 26 Lth. $3\frac{35}{87}$ Q.

8) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$.

Es ist hier der Werth (1) bestimmter Theile einer Zahl ($\frac{13}{12}$ von einer Zahl $= \frac{13}{12}$ ꝛc.) gegeben, und es soll daraus die Größe der ganzen Zahl bestimmt werden.

Sind $\frac{13}{12}$ von einer Zahl $= 1$; so sind $\frac{12}{12}$ oder die ganze Zahl $= \frac{12}{13}$.

Oder: $\frac{13}{12} \times$ eine gewisse Zahl $= 1$.

$\frac{1}{12} \times$ diese Zahl $= \frac{1}{13}$.

$\frac{12}{12} \times$ diese Zahl oder die ganze Zahl $= \frac{12}{13}$.

9) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. Sind $\frac{5}{6}$ von einer Zahl $= 1$, so ist die ganze Zahl $= \frac{6}{5}$. Um zu erfahren, wie vielmal ich $\frac{6}{5}$ nehmen muß, um $\frac{2}{3}$ zu erhalten, dividiere ich $\frac{2}{3}$ durch $\frac{6}{5}$; denn wenn das Vielfache ($\frac{2}{3}$) und ein Faktor ($\frac{6}{5}$) gegeben sind, so finde ich den andern Faktor durch Division (§. 7.), $\frac{2}{3}$ durch $\frac{6}{5}$ dividiert $= \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$; also muß ich die Zahl, von welcher $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$ ist, $\frac{5}{9}$ Mal nehmen, um $\frac{2}{3}$ zu bekommen.

10)

Ell. br.	Ellen Tap.
$1\frac{1}{2}$	200
$2\frac{1}{2}$	x

x = 120 Ellen.

11)

Perſ.	Wochen.
87	28
84	x

x = 29 Wochen; alſo ſind 84 Perſonen im Ganzen 2 + 29 Wochen = 31 Wochen verſorgt.

12) Um 4 fl. Zins von Hundert zu haben, muß B. ſein Geld 1 Jahr ausſtellen; um 5 fl. Zins von Hundert zu haben, muß er ſein Geld $1\frac{1}{4}$ Jahr ausſtellen.

c.

1)

Stdn.	Tage.
10	16
12	x

x = $13\frac{1}{3}$ Tage.

2) a.

m	Ellen
3	5
2	x

x = $3\frac{1}{3}$ Ellen.

b.

Elle br.	Ellen Tuch
$\frac{4}{5}$	10
$3\frac{1}{3}$	x′

x′ = $2\frac{2}{5}$ Ellen.

3) Steht ein Schaf auf 2 fl. 12 Kzr., ſo bekommt man für eine gewiſſe Summe Geld 600 Schafe; ſteht ein Schaf auf 2 fl. 45 Kzr., ſo hat man für dieſelbe Summe Geld nur 480 Schafe; mithin ſind 120 Schafe zu Grunde gegangen.

4) a. 50 Kzr. b. 15 fl. 5) $187\frac{69}{80}$ fl. 6) a. 292 fl. b. 7300 fl.

6) Sind $\frac{5}{8}$ der Roggenernte = 100 Mltr., ſo ſind $\frac{3}{8}$ dieſer Ernte = 60 Mltr.; koſten 60 Mltr. 270 fl., ſo koſtet 1 Mltr. $4\frac{1}{2}$ fl.

8) $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$. Sind $\frac{12}{35}$ von der Summe = 96 fl., ſo ſind $\frac{35}{35}$ oder die ganze Summe = 280 fl.

§. 26.

Mehrgliedrige Zweiſatzrechnungen.

A. Aufgaben verſchiedenen Inhaltes.

a.

1) Es iſt nach Gulden gefragt; der bekannte Satz heißt: 4 Perſonen verdienen in 3 Tagen 15 fl.; der Frageſatz heißt: wie viel fl. verdienen demnach 7 Perſonen in 5 Tagen. Jeder Satz beſteht alſo aus 3 Gliedern.

Wenn 4 Personen in 3 Tagen 15 fl. verdienen, so verdient
1 Person = 3 = $\frac{15}{4}$ fl., und
1 = = 1 Tage $\frac{5}{4}$ fl.; demnach verdienen
7 Personen in 1 = $\frac{35}{4}$ fl., und
7 = = 5 Tagen $\frac{175}{4}$ fl. = $43\frac{3}{4}$ fl.

Oder:

Pers.	Tag	fl.
4	3	15
7	5	x

4	3	$\frac{15 \times 7 \times 5}{4 \times 3} = \frac{5 \times 7 \times 5}{4} = 43\frac{3}{4}$ fl.
1	3	
1	1	
7	1	
7	5	

Es ist hier bekannt, wie viel eine gewisse Anzahl Personen in einer bestimmten Anzahl Tage verdient, und daraus soll der Verdienst einer größern Anzahl Personen in einer bestimmten Zeit gefolgert werden. Nachdem ich die Zahlglieder, welche den bekannten Satz bilden, von den Zahlgliedern, welche den Fragesatz bilden, gehörig unterschieden, habe ich die Auflösung mit einem Zahlgliede des bekannten Satzes begonnen, dessen gleichnamiges Glied im Fragesatz bestimmt ist; hierauf habe ich die 2 ersten Glieder des bekannten Satzes in Zahlen zu verwandeln gesucht, von denen leicht auf die bekannten Glieder des Fragesatzes (als auf Vielfache dieser Zahlen) geschlossen werden konnte, und so hat die entsprechende Veränderung des letzten Gliedes im bekannten Satze zu dem verlangten Ergebnisse geführt.

Anm. Man kann die mehrgliedrigen Zweisatzrechnungen auch auf zweigliedrige zurückführen.

Es verdienen nämlich 4 Personen in 3 Tagen so viel, als 4 × 3 Personen in 1 Tag; und 7 Personen in 5 Tagen so viel, als 35 Personen in einem Tage. Demnach würde der Ansatz heißen:

Pers.	Tag	fl.
12	1	15
35	1	x

Da aber gleiche Zahlglieder in beiden Sätzen bei der Auflösung sich gegenseitig aufheben, daher auf das Resultat keinen Einfluß üben und deßwegen schon im Ansatze weggelassen werden; so heißt nun der Ansatz:

Perf.	fl.
12	15
35	x

x = $43^3/_4$ fl.

2) $19\frac{2}{7}$ Mltr. 3) $7\frac{7}{15}$ Morgen. 4) $7\frac{19}{45}$ fl. 5) $82\frac{7}{8}$ fl. 6) $66\frac{2}{3}$ Pfd. 7) $35\frac{1}{5}$ Stück. 8) 4 Arb. 9) 9 Tage. 10) 2 Pferde. 11) 4 Wägen. 12) 1 Elle breit.

b.

1) 40 Ellen. 2) $4\frac{1}{2}$ Ruthen breit. 3) 4 Mark. 4) 12löthig.*) 5) $1\frac{23}{25}$ Quentchen. 6) 4 Pfd. kosten 9 Kzr. 7) $1\frac{1}{2}$ Pfd. 8) 6000 Mann. 9) 13 Tage. 10) 8 Tage. 11) 16 Schreibbücher. 12) 87 Ellen.

c.

1)

Morgen.	Tag.	Stdn.	Tagl.
$5\frac{1}{2}$	5	10	4
22	4	8	x

x = 25 Tagelöhner.

Oder:

Morgen.	Stdn.	Tagl.
$5\frac{1}{2}$	50	4
22	32	x

x = 25.

2)

Arb.	Stdn.	Morgen	Tage
4	10	5	6
6	8	12	x

x = 12 Tage.

3)

Mann	Mon.	fl.
4000	12	280000
4800	5	x

x = 140000 fl.

4) Nachdem 4 Arbeiter 3 Tage lang gearbeitet hatten, war nur noch 30 Tage lang zu thun, als noch 2 Arbeiter hinzukamen. Brauchen 4 Arbeiter 30 Tage zu einem Geschäft, so brauchen 6 Arbeiter nur 20 Tage; diese 6 Arbeiter arbeiteten 4 Tage lang, also war noch auf 16 Tage Arbeit, als noch 3 Arbeiter hinzukamen. Ein Geschäft, zu welchem 6 Arbeiter 16 Tage brauchen, bringen 9 Arbeiter in $10\frac{2}{3}$ Tagen fertig; also wird die ganze Arbeit in $3 + 4 + 10\frac{2}{3}$ Tagen $= 17\frac{2}{3}$ Tagen fertig.

5) 3 Personen bearbeiten 100 Quadratruthen, wenn sie jeden Tag 10 Stunden arbeiten, in 6 Tagen; 4 Personen bearbeiten demnach 140 Quadratruthen, wenn sie des Tages 9 Stunden arbeiten, in 7 Tagen.

6)

Kubikfuß	Tage	Arbeiter
4800	9	5
2400	$2\frac{1}{4}$	x

x = 10 Arbeiter.

7) $34\frac{29}{64}$ Tage. 8) $102\frac{6}{7}$ Stück.

*) Siehe §. 30. a. Anmerkung.

B. Zinsrechnungen.

a.

1) K. (k) = 460; Jahre (n) = 5; v. H. (p) = $4\frac{1}{2}$ fl.; Z. (z) = x.

fl. Kap.	Jahre	fl. Zins
100	1	$\frac{9}{2}$
460	5	x

x = $103\frac{1}{2}$ fl.

2)

fl. Zins	Jahre	fl. Kap.
27	3	200
180	4	x

x = 1000 fl.

3)

fl. Zins	fl. Kap.	Jahre.
5	100	1
80	320	x

x = 5 Jahre.

4)

fl. Kap.	Jahre	fl. Zins
100	1	$\frac{9}{2}$
6000	3	x

x = 810 fl. Zins.

5) 450 fl. Zins. 6) $3\frac{1}{2}$ Jahr. 7) 5 fl.

8) Sobald Kapital, Zeit und Kapital sammt Zins in einem Satze vorkommen, so suche man den reinen Zins in die Rechnung zu bekommen, damit man nicht zu unrichtigen Schlüssen verleitet werde.

Man erhält den Zins, wenn man das Kapital vom Kapital sammt Zins abzieht. 936 fl. — 720 fl. = 216 fl.

fl. Kap.	Jahre	fl. Zins.
720	4	216
100	1	x

x = $7\frac{1}{2}$ v. H.

9)

fl. Kap.	Jahre	fl. Zins.
640	4	128
100	1	x

x = 5 v. H.

10)

fl. Kap.	fl. Zins	Jahr.
100	4	1
450	72	x

x = 4 Jahr.

11)

fl. Kap.	fl. Zins	Jahr.
100	$\frac{9}{2}$	1
7200	810	x

x = $2\frac{1}{2}$ Jahr.

12)

fl. Zins	Tage	fl. Kap.
4	365	100
$\frac{1}{5}$	1	x

x = 1825 fl.

b.

1) Vom 17. Nov. 1826 bis zum 17. Nov. 1830 sind es 3 × 365 Tage + 1 × 366 Tage = 1461 Tage. Vom 17. Nov. 1830 bis 7. März 1831 sind es 110 Tage; 1461 Tage + 110 Tage = 1571 Tage. Erhält man in 365 Tagen von 100 fl. Ka=

pital 4 fl. Zins; so erhält man in 1571 Tagen von 4000 fl. Kapital $688\frac{48}{73}$ fl. Zins. Rechnet man keinen Schalttag, so erhält man für 1570 Tage $688\frac{16}{73}$ fl. Zins. Im praktischen Leben rechnet man keine Schalttage. Siehe Anmerkung unten.

2)

	fl. Kap.	Tagen	fl. Zins.
a.	100	366	$\frac{9}{2}$
	17500	1	x

$x = 2$ fl. $9\frac{6}{61}$ Kzr.

b. Vom 1 Januar bis 18. Oktober = 291 Tage, also 291 $\times$ 2 fl. $9\frac{6}{61}$ Kzr. = 626 fl. $7\frac{38}{61}$ Kzr.

3) $13017\frac{1}{2}$ fl. 4) $4\frac{8}{165}$ Jahr. 5) 4 v. H. 6) $1209\frac{111}{209}$ fl. 7) 21. März incl. 8) $3\frac{3}{5}$ Monate. 9) 1350 fl. 10) 2 v. H. 11) $4\frac{4}{5}$ v. H.

12) Im 1ten Jahre betragen die Zinsen von 3250 fl. . . $162\frac{1}{2}$ fl.
der Rest von 1000 fl. = $837\frac{1}{2}$ fl.
Im 2ten Jahre die Zinsen von 3250 fl.
— $837\frac{1}{2}$ fl. = $2412\frac{1}{2}$ fl. . . . . $120\frac{5}{8}$ fl.
der Rest von 1000 fl. = $879\frac{3}{8}$ fl.
Im 3ten Jahre die Zinsen von $2412\frac{1}{2}$
— $879\frac{3}{8}$ = $1533\frac{1}{8}$ fl. . . . . $76\frac{21}{32}$ fl.
der Rest von 1000 fl. = $923\frac{11}{32}$ fl.
Im 4ten Jahre die Zinsen von $1533\frac{1}{8}$ fl.
— $923\frac{11}{32}$ fl. = $609\frac{25}{32}$ fl. . . . . $30\frac{313}{640}$ fl. = a.

Summe der Zinsen = $390\frac{173}{640}$ fl.
dazu das Kapital = 3250 fl.

die Summe aller Zahlungen = $3640\frac{173}{640}$ fl. = b.

fl. Kap.	Mon.	fl. Zins
100	12	4
2500	6	x

$x = 50$ fl. Zins.

Zieht man nun die Summe beider Kapitalien und den Zins des ersten Kapitals von $6666\frac{2}{3}$ fl. ab; so findet man, wie viel Zins das zweite Kapital getragen hat. 2500 + 4000 + 50 = 6550; $6666\frac{2}{3}$ fl. — 6550 fl. = $116\frac{2}{3}$ fl.

fl.	Mon.	fl. Zins.
4000	10	$116\frac{2}{3}$
100	12	x

$x = 3\frac{1}{2}$ fl.

Anm. 1. Wenn man die Größe eines gewissen Kapitals allgemein mit k (§. 14. I. 1), die Zahl, welche angibt, wie viele Jahre das Kapital

ausgestanden, mit n, den Zinsfuß mit p bezeichnet; so erhält man eine Formel, d. i. eine mit Zahlzeichen niedergeschriebene Regel für die Zinsen (Z) aus folgendem Ansatze:

Kap.	Jahr	Zins
100	1	p
k	n	Z
100	1	$\frac{p \times k \times n}{100}$
1	1	
k	1	
k	n	

Man erhält also die Formel 1) $Z = \frac{p.k.n}{100}$.

Wenn wir diese Formel auf die Zinsrechnung §. 26. a. 4. anwenden; so finden wir:

$$Z = \frac{4^1/_2 \,.\, 6000 \,.\, 3}{100} = \frac{9 \,.\, 60 \,.\, 3}{2} = 810 \text{ fl.}$$

Die Schüler der höhern Bürgerschulen und Gymnasien sollen jede Formel als Regel auszusprechen und jede Regel als Formel anzuschreiben gewöhnt werden.

2) Wenn Zinsfuß, wirklicher Zins und Zeit gegeben sind; so findet man das Kapital aus dem Ansatze:

Zins	Jahr	Kap.
p	1	100
Z	n	k

Formel 2) $k = \frac{100 \,.\, Z}{p \,.\, n}$.

Es sei der wirkliche Zins (Z) = 810 fl., der Zinsfuß (p) = $4^1/_2$, die Zeit (n) = 3 Jahre; so ist $k = \frac{100 \,.\, 810}{4^1/_2 \,.\, 3} = \frac{100 \,.\, 810 \,.\, 2}{9 \,.\, 3} = 100 \,.\, 30 \,.\, 2 = 6000$.

3) Auf dieselbe Weise, oder durch Ableitung aus den bereits gefundenen Formeln, findet man Formel 3) $n = \frac{100\, Z}{p \,.\, k}$;

Formel 4) $p = \frac{100 \,.\, Z}{n \,.\, k}$.

Wendet man die Formel 3) auf die Zinsrechnung §. 26. a. 3. an; so findet man:

$$n = \frac{100 \,.\, 80}{5 \,.\, 320} = 5 \text{ Jahre.}$$

Die Formel 4) auf die Zinsrechnung §. 26 a. 8. angewendet, gibt

$$p = \frac{100 \,.\, 216}{4 \,.\, 720} = 7^1/_2.$$

4) Wenn das Kapital, der Zinsfuß und die Zeit in Monaten (m) gegeben sind, so erhält man die Zinsen aus folgendem Ansatze:

Kap.	Mon.	Zins
100	12	p
k	m	Z

Formel 5) $Z = \frac{p.k.m.}{1200}$.

Es sei k = 6000 pr. Thlr.; m = $7^3/_5$ Monate; p = 5; so ist

$$Z = \frac{6000 \, . \, 5 \, . \, 7^3/_5}{1200} = \frac{5 \, . \, 5 \, . \, 38}{5} = 190 \text{ Thlr.}$$

Die hier berechnete Aufgabe würde nach kaufmännischer Angabe lauten:

6000 Thlr. zu 5 Prc. jährlich in $7^3/_5$ Monaten?

5) Im kaufmännischen Verkehre rechnet man im Allgemeinen die Zinsen nach Tagen. Dabei nimmt man 1 Jahr = 360, den Monat also = 30 Tage, weil sich dadurch viele die Berechnung sehr erleichternde Abkürzungen anbringen lassen. Nur in England macht man hievon eine Ausnahme. Man rechnet dort das Jahr zu 365 Tagen, und jeden Monat zu der Anzahl von Tagen, die er wirklich hat. In allen nachfolgenden Aufgaben im „Rechenunterrichte" lasse man von jetzt an das Jahr zu 360 Tagen annehmen, und Brüche in Kreuzern, die größer sind als $^1/_2$, für einen ganzen Kreuzer, und solche, welche kleiner sind als $^1/_2$, gar nicht in Rechnung bringen.

Wenn nun das Kapital, der Zinsfuß und die Zeit in Tagen (t) gegeben sind; so findet man den Zins aus folgendem Ansatze:

Kap.	Tage	Zins.
100	360	p
k	t	Z

Formel 6) $Z = \frac{k \, . \, t \, . \, p}{36000}$

$= k \, . \, t \, . \, \frac{p}{36000}$.

Ist p = 5, so ist $\frac{p}{36000} = {}^1/_{7200}$;

" p = 6, " " $\frac{p}{36000} = {}^1/_{6000}$;

" p = 4, " " $\frac{p}{36000} = {}^1/_{9000}$;

" p = $4^1/_2$, " " $\frac{p}{36000} = {}^1/_{8000}$;

" p = $3^3/_4$, " " $\frac{p}{36000} = {}^1/_{9600}$;

" p = 3, " " $\frac{p}{36000} = {}^1/_{12000}$ u. s. w.

Man nennt die Zahlen 7200, 6000 u. s. w. die dem gegebenen Zinsfuße entsprechenden beständigen (konstanten) Zahlen oder die Divisoren, und es ergibt sich die Regel:

Wenn das Kapital, der Zinsfuß und die Zeit in Tagen gegeben sind und der wirkliche Zins gesucht werden soll; so multiplizierе die Zahl der Tage mit dem Kapital und dividiere das Produkt durch die dem gegebenen Zinsfuße entsprechende Zahl.

Z. B. 942 fl. à $3^3/_4$ Prc. in 91 Tagen?

$$Z = k \cdot t \cdot \frac{p}{36000} = \frac{422 \cdot 91}{9600} = 8 \text{ fl. } 56 \text{ Kzr.}$$

Wenn die Interessen vieler Kapitalien für einen und denselben Schuldner zu berechnen sind, wie z. B. im Kontokorrent des Bankiers; so multiplizierе die Zahl der Tage mit den zugehörigen Kapitalien, addiere die Produkte und dividiere die Summe derselben durch die dem Zinsfuße entsprechende Zahl.

C.

Termin- und Durchschnitts-Rechnungen.

Die Terminrechnung, die man auch Zeit- oder Terminreduktionsrechnung nennt, lehrt von 2 und mehr Zahlungsfristen eine verhältnißmäßig mittlere Zeit finden, in welcher die Zahlung ohne Nachtheil des Gläubigers oder Schuldners auf ein Mal geleistet werden kann. Aufgaben, in denen von Veränderung des Zahlungstermines die Rede ist, sind also solche Aufgaben, in denen bestimmte Summen (die als Kapitalien oder als Zinsen erscheinen) in bestimmten Zeiten abgetragen werden sollen, und in welchen die Frage aufgeworfen ist, wann alle diese Summen auf ein Mal abbezahlt werden können. Wenn in solchen Aufgaben von keinem Zinsfuße oder nicht ausdrücklich von Zinsen die Rede ist; so werden die Kapitalien als unverzinslich angesehen.

Bei der Durchschnitts-Rechnung ist der mittlere Zinsfuß verschiedener Kapitalien oder der Zinsfuß im Durchschnitt zu suchen.

Bei der Terminrechnung können 3 Fälle vorkommen.

1) Berechnung des mittleren Zahlungstermins bei gleichem Kapitale und gleichem Zinsfuße;
2) Berechnung der mittleren Zahlungsfrist bei ungleichem Kapitale und gleichem Zinsfuße;
3) Berechnung des mittleren Zinsfußes und der mittleren (gemeinschaftlichen) Verfallzeit.

Beantwortung der Aufgaben.

1) a. Der Schuldner hat 100 fl. nach jedem Jahre zu bezahlen,

ohne zu einer Verzinsung des Geldes verpflichtet zu sein; die 100 fl., welche er nach 1 Jahre zu bezahlen hat, können ihm noch in diesem Jahre 5 fl. Zins tragen, wenn wir den Zinsfuß zu 5 von 100 annehmen.

Wenn der Schuldner also statt 100 fl. nach 1 Jahre, 100 fl. sogleich bezahlt, so verliert er . . . . 5 fl. Zins;
wenn er statt 100 fl. nach 2 Jahren, 100 fl. baar bezahlt, so verliert er . . . . 10 fl. " ;
wenn er statt 100 fl. nach 3 Jahren, 100 fl. baar bezahlt, so verliert er . . . . 15 fl. " ;
bezahlt er statt 100 fl. nach 4 Jahren, 100 fl. baar, so verliert er . . . . 20 fl. " ;
bezahlt er statt 100 fl. nach 5 Jahren, 100 fl. baar, so verliert er . . . . 25 fl. " .

Summe = 75 fl. Zins.

Der Schuldner würde also 75 fl. Zins verlieren, wenn er die 500 jetzt bezahlte; er darf daher die 500 fl. so lange zurückhalten, bis sie 75 fl. Zins getragen haben.

100 fl. Kap. tragen 5 fl. Zins in 1 Jahr;
500 fl. " " 75 fl. " " 3 Jahren.

Für den Schuldner ist es also rücksichtlich der Zinsen gleichgültig, ob er nach jedem Jahr 100 fl. oder nach 3 Jahren 500 fl. auf einmal bezahlt. Erhielte der Gläubiger 500 fl. baar, statt nach jedem Jahre 100 fl., und er würde dieses Geld sogleich zu 5 v. H. ausleihen, so würde er 75 fl. Zins zu viel gewinnen; er kann also auch erst nach 3 Jahren die ganze Summe auf einmal ansprechen.

Es sollte hier der Zeitpunkt bestimmt werden, wann eine in verschiedenen Fristen fällige Schuld ohne Nachtheil für eine der beiden betheiligten Personen auf Ein Mal bezahlt werden könne. — Ich habe zuerst gesucht, wie viel Zinsen der Schuldner ziehen könnte, wenn er die in jährlichen Fristen abzutragenden Posten bis zu den ursprünglich festgesetzten Zahlungsterminen nach einem angenommenen Zinsfuße ausleihen würde; sodann habe ich aus dem angenommenen Verhältnisse des Zinses zu 100 fl. in 1 Jahre berechnet, wie lange der Schuldner die ganze Summe in Händen haben muß, damit er so viel Zinsen beziehe, als er würde erhalten haben, wenn die Bezahlung an den ursprünglichen Zahlungsterminen geschehen wäre, und er unterdessen das Geld ausgeliehen hätte.

Oder:

b. Wenn der Gläubiger nach 1 Jahre 100 fl. erhält, so kann er dieses Geld noch 4 Jahre ausleihen bis zum Ablauf der 5 Jahre, und erhält in dieser Zeit zu 5 v. H. gerechnet . . 20 fl. Zins;

die 100 fl., welche er nach 2 Jahren erhält, kann er noch 3 Jahre ausleihen, und erhält davon . . 15 fl. „ ;

die 100 fl., welche er nach 3 Jahren erhält, kann er bis zum Ablauf der 5 Jahre noch 2 Jahre ausleihen, und erhält in dieser Zeit . . . . . 10 fl. „ ;

die 100 fl., welche er nach 4 Jahren erhält, kann er noch 1 Jahr ausleihen, und erhält davon . . 5 fl. „ ;

die 100 fl., welche er nach 5 Jahren erhält, kann er nicht mehr ausleihen.

Summe der Zinsen = 50 fl.

Sollen nun die 500 fl. auf einmal abgetragen werden, so muß dies so geschehen, daß der Gläubiger, wenn er sie ausleihet, noch bis zum Ablauf der 5 Jahre 50 fl. Zins daraus ziehen kann.

100 fl. tragen 5 fl. Zins in 1 Jahr.
500 fl. „ 50 fl. „ „ 2 Jahren.

Der Gläubiger muß also die 500 fl. noch 2 Jahre vor Ablauf der 5 Jahre in Händen haben; sie müssen ihm also nach 5—2, d. h. nach 3 Jahren, bezahlt werden.

Diese Auflösung beruht auf der Ansicht, daß der Gläubiger aus den einzelnen Posten bis zum Ablaufe der letzten Zahlungsfrist noch eine gewisse Summe Zins ziehen kann, wenn er dieselben sogleich nach ihrer Abtragung ausleihet, und daß er daher so lange vor Ablauf der letzten Zahlungsfrist die ganze Schuldsumme in Händen haben muß, als nothwendig ist, um nach dem angenommenen Zinsfuße die ihm zukommende Summe Zins ziehen zu können.

c. Um den Nutzen zu berechnen, den der Schuldner noch aus den einzelnen Leistungen bis zu ihrer Verfallzeit ziehen kann, muß man entweder aus einem angenommenen Zinsfuße die Zinsen aus diesen Leistungen suchen, oder die einzelnen Leistungen mit ihren Zeiten multiplizieren. In letzterem Falle geben die Summe dieser Produkte in 1 Zeitabschnitt die Zinsen an, welche der Schuldner noch möglicher Weise ziehen könnte, wenn er nach den Bedingungen der Aufgabe bezahlt. Auf diese Weise findet man einen bekannten Satz, und nimmt man hiezu die Summe der Lei-

stungen als erstes Glied des Fragesatzes, so ist der Ansatz gefunden.

100 fl.	tragen in 1 Jahre	so viel Zins, als	100 fl.	in 1 Jahre;
100 fl.	= = 2 Jahren	= = = =	200 fl.	= 1 = ;
100 fl.	= = 3 =	= = = =	300 fl.	= 1 = ;
100 fl.	= = 4 =	= = = =	400 fl.	= 1 = ;
100 fl.	= = 5 =	= = = =	500 fl.	= 1 = .
			1500 fl.	= 1 Jahre.

Der Schuldner hat also nach den Bedingungen der Aufgabe das Recht, die ganze Summe so lange in Händen zu behalten, bis sie ihm so viel Zins getragen hat, als 1500 fl. in 1 Jahre bringen.

fl.	Jahre.
1500	1
500	x

$x = \frac{1500}{500} = 3$ Jahre.

XXVI. Daher die Regel: **Um bei Terminrechnungen die mittlere Zahlungsfrist zu erhalten, multipliziere die einzelnen Leistungen (Kapitalien) mit ihren Zeiten und dividiere die Summe dieser Produkte durch die Summe der Leistungen.**

Anm. Der Schüler soll sämmtliche Terminrechnungen nach den Auflösungsarten a und b lösen können, bevor er zur Auffindung dieser Regel angeleitet wird.

d. In der vorliegenden Aufgabe sind die Kapitalien oder die einzelnen Leistungen einander gleich. Nun ist aber die Summe von zwei oder mehr Produkten, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben, dividiert durch die Summe dieser gemeinschaftlichen Faktoren = der Summe der nicht gemeinschaftlichen Faktoren, dividiert durch die Anzahl der gemeinschaftlichen Faktoren.

So ist z. B. $(6 \times 3 + 6 \times 4 + 6 \times 5) : (6 + 6 + 6) = (3 + 4 + 5) : 3 = 4.$

Eben so ist $(ab + ac + ad) : (a + a + a) = (b + c + d) : 3$;

denn $(ab + ac + ad) : (a + a + a) = \frac{a(b + c + d)}{3a} = \frac{b + c + d}{3a} = \frac{b + c + d}{3}.$

Man findet daher bei gleichem Kapitale (gleichen Leistungen), welche bis zur Verfallzeit nicht zu verzinsen sind, oder, wenn sie verzinst werden müssen, bei gleichem Kapitale und gleichem Zinsfuße die mittlere Zahlungsfrist, wenn man die Summe der verschiedenen Zeiten durch die Anzahl der Kapitalien dividirt.

$\frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3.$

2) Die gemeinschaftliche Verfallzeit für 6 gleiche Kapitalien von je 900 fl. in bezüglich 4, 5, 7, 9, 10, 14 Monaten zahlbar, ist = $\frac{4+5+7+9+10+14}{6} = \frac{49}{6} = 8\frac{1}{6}$ Mon.

3) a.

600 fl. zu 4 v. H.	tragen	in 1 Jahre	. .	24 fl. Zins,
800 fl. zu 3 v. H.	"	" 1 "	. .	24 fl. " ,
1000 fl. zu $4\frac{1}{2}$ v. H.	"	" 1 "	. .	45 fl. " ,
1200 fl. zu 5 v. H.	"	" 1 "	. .	60 fl. " ,

die Summe der Kapitalien ist = 3600 fl.; die Summe der Zinsen = 153 fl.

3600 fl. tragen 153 fl. Zins,
100 fl. " x fl. " ?

x = $4\frac{1}{4}$ v. H.

b.

600 fl.	tragen zu 4 v. H.	so viel Zins, als	2400 fl.	zu 1 v. H.;
800 "	" " 3 " "	" " "	2400 "	" 1 " ";
1000 "	" " $4\frac{1}{2}$ " "	" " "	4500 "	" 1 " ";
1200 "	" " 5 " "	" " "	6000 "	" 1 " ".
3600			15300 fl.	

15300 fl. Kapital tragen einen gewissen Zins zu 1 v. H.;
3600 " " denselben " " x

$x = \frac{15300}{3600} = 4\frac{1}{4}$ v. H.

Daher die Regel:

Man findet den mittleren Zinsfuß verschiedener Kapitalien oder den Zinsfuß im Durchschnitt, wenn man jedes Kapital mit seinem Zinsfuße multipliziert, und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Kapitalien dividiert.

4) Nehmen wir bei der Berechnung den Zinsfuß zu 4 von 100 an,

so tragen 150 fl. dem Schuldner in 2 Monaten . 1 fl. Zins;
200 fl. können noch 3 Monate lang ausgeliehen werden, sie bringen zu 4 v. H. in dieser Zeit . 2 fl. „ ;
300 fl. in 6 Monaten tragen . . . . . . 6 fl. „ ;
150 fl. in 9 Monaten tragen . . . . . . $4\frac{1}{2}$ fl. „ ;

die Summe der Zinsen = $13\frac{1}{2}$ fl.

fl. Kap.	fl. Zins	Monate
100	4	12
800	$13\frac{1}{2}$	x

x = $5\frac{1}{16}$ Monate.

Oder:

150 fl. tragen in 2 Mon. so viel Zins, als 2 × 150 fl. = 300 fl. in 1 Monat,
200 fl. tragen in 3 Mon. so viel Zins, als 3 × 200 fl. = 600 fl. in 1 Monat,
300 fl. tragen in 6 Mon. so viel Zins, als 6 × 300 fl. = 1800 fl. in 1 Monat,
150 fl. tragen in 9 Mon. so viel Zins, als 9 × 150 fl. = 1350 fl. in 1 Monat.

800 fl. 4050 fl.

Um eine gewisse Summe Zins zu bekommen, muß man 4050 fl. 1 Monat lang ausstellen; um dieselbe Summe Zins zu bekommen, muß man 800 fl. wie lang ausstellen?

fl.	Mon.
4050	1
800	x

x = $5\frac{1}{16}$ Monat.

5) Nach Regel XXVI:

400 × 5 = 2000
500 × 6 = 3000 . 9800 : 1500 = $6\frac{8}{15}$ Mon.
600 × 8 = 4800.

1500 9800.

Setzen wir 400 fl. = a, 500 fl. = b., 600 fl. = c, 5 Monate = l, 6 Monate = m, 8 Monate = n; so erhalten wir $\frac{al + bm + cn}{a + b + c}$ Monate.

6) a) F. hat am 1. Januar 1849, 2400 fl. und am 1. Juli desselben Jahres 3000 fl. geliehen. Hätte er die Jahreszinsen von beiden Kapitalien am 1. Januar 1850 bezahlt, so würde er so viel zu viel bezahlt haben, als 3000 fl. in 6 Monaten tragen. Diese 3000 fl. tragen, wenn 5 v. H. gerechnet werden, in 6 Monaten 75 fl. (eine gewisse Summe Zins). Will man nun die Zinsen von beiden Kapitalien an demselben Tage empfangen, so muß man beide Kapitalien vom 1. Jänner an noch so lange ausstehen lassen, bis sie 75 fl. (dieselbe Summe) Zins getragen haben.

fl. Kap.		Mon.
3000	tragen einen gewissen Zins in	6
5400	„ denselben „ „	x

$x = 3\frac{1}{3}$ Monaten.

Statt also den Zins von 2400 fl. am 1 Jänner und den Zins von 3000 fl. am 1. Juli einzunehmen, kann man die Zinsen von beiden Kapitalien am 10. April in Empfang nehmen.

b) Die Jahreszinsen von 2400 fl. = 120 fl.
„ „ „ 3000 fl. = 150 fl.

Es sind also die Leistungen 120 fl. und 150 fl.

Um die Zeiten zu finden, müssen die Leistungen von einem bestimmten Zeitpunkte an berechnet werden. Nehmen wir den 1. Jänner 1849 als diesen Zeitpunkt an, so sind 120 fl. von da an nach 12 Monaten und 150 fl. nach 18 Monaten zu zahlen.

Daher nach Regel XXVI:

$120 \times 12 = 1440$
$150 \times 18 = 2700$ 4100 : 270 = $15\frac{1}{3}$ Monaten.
270 4140

Also ist vom 1. Jänner 1849 an gerechnet nach $15\frac{1}{3}$ Monat, d. h. am 10. April 1850 die mittlere Verfallzeit.

Nehmen wir den 1. Juli 1849 als den obengenannten bestimmten Zeitpunkt an, so sind von da an 120 fl. nach 6 Monaten und 150 fl. nach 12 Monaten fällig.

Daher:

$120 \times 6 = 720$
$150 \times 12 = 1800$ 2520 : 270 = $9\frac{1}{3}$ Monaten.
270 2520

Vom 1. Juli 1849 an nach $9\frac{1}{3}$ Monaten, d. i. am 10. April 1850.

Nun bedenke man aber, daß die Zinsen sich zu einander verhalten, wie die Kapitalien. Man kann daher, statt den Zinsen, auch die Kapitalien mit den Zeiten multiplizieren.

Vom 1. Jänner 1849 an gerechnet:

$2400 \times 12 = 28800$

$3000 \times 18 = 54000$ $\quad$ $82800 : 5400 = 15\frac{1}{3}$ Monaten.

$5400 \quad 82800$

7) Wenn der mittlere Zinsfuß und die mittlere Verfallzeit zu berechnen sind; so suche nach der in §. 26. C. 3. aufgestellten Regel den mittleren Zinsfuß, und nach der in §. 26. C. 1. aufgestellten Regel die mittlere Verfallzeit.

Z. B. Es sind zu bezahlen: 400 fl. in 4 Monaten, 200 fl. in 6 Monaten, 400 fl. in 8 Monaten und 800 fl. in 9 Monaten, und bis dahin mit bezüglich 5, 4, $3\frac{1}{2}$ und 6 Prc. zu verzinsen. Wann und zu welchem mittleren Zinsfuße können diese Kapitalien auf ein Mal abgetragen werden?

Auflös. $400 \times 5 = 2000$

$200 \times 4 = 800$ $\quad$ $9000 : 1800 = 5.$

$400 \times 3\frac{1}{2} = 1400$ $\quad$ Also ist der mittlere Zinsfuß

$800 \times 6 = 4800$ $\quad$ $= 5$ v. H.

$1800 \quad 9000$

$400 \cdot 4 = 1600$

$200 \cdot 6 = 1200$ $\quad$ $13200 : 1800 = 7\frac{1}{3}.$

$400 \cdot 8 = 3200$ $\quad$ Also ist die ganze Summe nach

$800 \cdot 9 = 7200$ $\quad$ $7\frac{1}{3}$ Monaten zu zahlen.

$1800 \quad 13200$

D. Abzugs- oder Rabatt-Rechnungen.

1) fl. (nach 8 Jahr.) fl. (baar)

136 $\quad$ 100

24600 $\quad$ x

$x = 18088\frac{4}{17}$ fl.

2) Welches Gebot besser ist, kann nicht bestimmt werden, da dies davon abhängt, wie der Verkäufer sein Geld umzusetzen weiß. Der Abzug betrug 5 v. H.

3) fl. (3 Mon.) fl. (baar)
$101\frac{1}{2}$ 100
$\frac{54000}{4}$ x

$x = 13300\frac{100}{203}$ fl.

fl. (6 Mon.) fl. (jetzt)
103 100
13500 x

$x' = 13106\frac{82}{103}$ fl.

fl. (9 Mon.) fl. (baar)
$104\frac{1}{2}$ 100
13500 x''

$x'' = 12918\frac{138}{209}$ fl.

fl. (12 Mon.) fl. (baar)
106 100
13500 x'''

$x''' = 12735\frac{45}{53}$ fl.

Die ganze Baarzahlung beträgt $52061\frac{184840427}{231608993}$ fl.

4) fl. (nach 1 Jahr) fl. (baar)
105 100
400 x

$x = 380\frac{20}{21}$ fl.

fl. (2 Jahr.) fl. (baar)
110 100
300 x'

$x' = 272\frac{8}{11}$ fl.

fl. (3 Jahr.) fl. (baar)
115 100
200 x''

$x'' = 173\frac{21}{23}$ fl.

Die ganze Baarzahlung beträgt mithin $827\frac{3149}{5313}$ fl.

5) fl. (1 Monat) fl. (baar)
$100\frac{1}{2}$ 100
75 x

$x = 74\frac{42}{67}$ fl.

fl. (2 Monat) fl. (baar)
101 100
75 x_1

$x_1 = 74\frac{26}{101}$ fl.

fl. (3 Mon.) fl. (baar)
$101\frac{1}{2}$ 100
75 x_2

$x_2 = 73\frac{181}{203}$ fl.

fl. (4 Mon.) fl. (baar)
102 100
75 x_3

$x_3 = 73\frac{9}{17}$ fl.

fl. (5 Mon.) fl. (baar)
$102\frac{1}{2}$ 100
75 x_4

$x_4 = 73\frac{7}{41}$ fl.

fl. (6 Mon.) fl. (baar)
103 100
75 x_5

$x_5 = 72\frac{84}{103}$ fl.

fl. (7 Mon.) fl. (baar)
$103\frac{1}{2}$ 100
75 x_6

$x_6 = 72\frac{32}{69}$ fl.

fl. (8 Mon.) fl. (baar)
104 100
75 x_7

$x_7 = 72\frac{3}{26}$ fl.

fl. (9 Mon.)	fl. (baar)	fl. (10 Mon.)	fl. (baar)
$104\frac{1}{2}$	100	105	100
75	x_8	75	x_9

$x_8 = 71\frac{161}{209}$ fl. $\qquad$ $x_9 = 71\frac{3}{7}$ fl.

fl. (11 Mon.)	fl. (baar)	fl. (12 Mon.)	fl. (baar)
$105\frac{1}{2}$	100	106	100
75	x_{10}	75	x_{11}

$x_{10} = 71\frac{19}{211}$ fl. $\qquad$ $x_{11} = 70\frac{40}{53}$ fl.

Summe = $871\frac{91441}{100000}$ fl.

6) So oft A 100 fl. baar bezahlt, hätte er nach $3\frac{1}{2}$ Jahren 128 fl. zu zahlen gehabt; wie viel hätte er nach $3\frac{1}{2}$ Jahren zu zahlen gehabt, wenn er 1260 fl. baar bezahlt?

fl. (baar)	fl. ($3\frac{1}{2}$ Jahr.)
100	128
1260	x

x = 1612 fl. 48 Kzr.

§. 27.

Theilungsrechnungen.

Die Theilungsrechnung (Repartitionsrechnung) wird angewendet, wenn eine Größe nach gewissen gegebenen Verhältnissen getheilt werden soll. Bei dem Verfahren, welches wir das Theilen nennen, wird irgend eine Zahl in mehrere unter sich gleiche Theile zerlegt; bei den Theilungsrechnungen wird eine Zahl, die man schlechthin das Ganze (Hauptganze) nennt, nach einem durch die Aufgabe vorgeschriebenen Verhältnisse (welches man den Theilungsfuß nennt) in ungleiche Theile zerlegt. Wenigstens dürfen die Theile nicht durchgängig gleich sein.

Der Schüler hat jedes Mal anzugeben, ob die Aufgabe bestimmt, um wie viel der eine Theil größer oder kleiner sein soll, als jeder andere, oder den wie vielsten Theil des Ganzen jeder Theil betragen soll.

a.

1) Wenn A. 1 fl. mehr bekommt, als B., so theilen Beide nur 39 fl. in gleiche Theile; A. erhält $19\frac{1}{2}$ fl. + 1 fl. = $20\frac{1}{2}$ fl. B. erhält $19\frac{1}{2}$ fl.

Oder:

A. erhält 1 Theil + 1 fl.
B. " 1 Theil.

Beide erhalten also 2 Theile + 1 fl.
2 Thle. + 1 fl. = 40 fl.; also sind 2 Theile ohne diesen 1 fl. = 39 fl., mithin 1 Theil = $19\frac{1}{2}$ fl.

A. = 1 Thl. + 1 fl. = $20\frac{1}{2}$ fl.
B. = 1 Thl. = $19\frac{1}{2}$ fl.

A. + B. = 2 Thle. + 1 fl. = 40 fl.

2) M. = 1 Thl.
N. = 1 Thl. + 2 fl.

2 Thle. + 2 fl. = 30 fl.
2 Thle. = 28 fl.
1 Thl. = 14 fl.

M. erhält also 14 fl.
N. " 16 fl.

Zusammen 30 fl.

3) C. = 1 Thl. — 1 fl.
D. = 1 Thl.

C. + D. = 2 Thle. — 1 fl. = 40 fl. Wenn also von 2 Theilen 1 fl. weggenommen wird, so sind sie = 40 fl.; wird dieser 1 fl. nicht abgezogen, so sind 2 Thle. = 41 fl., mithin 1 Thl. = $20\frac{1}{2}$ fl. C. erhält 1 Thl. — 1 fl., also $19\frac{1}{2}$ fl.; D. erhält $20\frac{1}{2}$ fl.

Oder:

C. = 1 Thl.
D. = 1 Thl. + 1 fl.

2 Thle. + 1 fl. = 40 fl.
2 Thle. = 39 fl.
1 Thl. = $19\frac{1}{2}$ fl.

C. = $19\frac{1}{2}$ fl.
D. = $20\frac{1}{2}$ fl.

C. + D. = 40 fl.

4) A. = $26\frac{1}{2}$ fl. B. = $23\frac{1}{2}$ fl.

Anm. In diesen 4 Aufgaben, sowie in einigen später folgenden ist die zu theilende Summe und außerdem angegeben, um wie viel größer oder kleiner der eine Theil sein soll, als der andere. Die Größe der einzelnen Theile soll berechnet werden. Die Angaben in einer Aufgabe dieser Art sind immer so, daß man aus Einem Theile alle übrigen durch Zu- oder Abzählen herleiten kann; mithin ist jener Theil als der eigentlich unbekannte anzusehen, da, sobald er bekannt ist, die übrigen sich leicht ergeben. Die Rechnung wird daher so zu führen sein, daß zunächst dieser Theil, den man den Haupttheil nennen kann, gefunden werde. Wenn es nun auch in Bezug auf das Ergebniß gleichgültig ist, welchen Theil man als Haupttheil betrachten will, da aus jedem die übrigen

abgeleitet werden können; so wird es doch in der Regel die Rechnung erleichtern, wenn man denjenigen erwählt, über dessen Größe im Vergleich mit den andern nichts angegeben ist, der also als unabhängig von den andern erscheint. (Bei a. 1. B.; bei 2. M.; bei 3. D.; bei 4. A.; bei b. 3. A. u. s. w.) Sobald nun festgesetzt ist, welcher Theil als Haupttheil betrachtet werden soll; so kann auch bestimmt werden, wie groß jeder andere Theil im Vergleich mit dem Haupttheile ist, indem man zu dem Haupttheile so viel zählt oder von demselben so viel abzieht, damit jeder andere entsteht. Sind auf diese Weise Ausdrücke für sämmtliche Theile gefunden; so schließt man aus dem Verhältnisse der Summe dieser Ausdrücke zur ganzen Theilungssumme auf die Größe des Antheils eines jeden Einzelnen.

Ist angegeben, wie vielmal ein Theil einen andern in sich faßt, c. 1, 2, 3, sowie in zusammengesetzten Aufgaben, c. 4, 5, 6; so nimmt man den Theil, der nicht durch andere bestimmt wird, als Haupttheil an, und schließt dann aus dem Verhältnisse der Summe dieser Theile zur ganzen Theilungssumme auf die Größe der Theile jedes Einzelnen.

5) A. = $20\frac{1}{3}$ fl. B. = $39\frac{2}{3}$ fl. 6) A = $26\frac{2}{3}$ fl. B. = $13\frac{1}{3}$ fl.

b.

1) A. = 1 Thl. — A = $6\frac{2}{3}$ fl.
B. = 2 Thl. — B. = $13\frac{1}{3}$ fl.
C. = 3 Thl. — C. = 20 fl.

6 Thl. = 40 fl. — Summe = 40 fl.
1 Thl. = $6\frac{2}{3}$ fl.

2) A. = $\frac{1}{2}$ Thl. — A. = $5\frac{2}{3}$ fl.
B. = 1 Thl. — B. = $11\frac{1}{3}$ fl.

$\frac{3}{2}$ Thl. = 17 fl. — A. + B. = 17 fl.
$\frac{1}{2}$ Thl. = $\frac{17}{3}$ fl. = $5\frac{2}{3}$ fl.

Oder:

A. = 1 Thl. — A. = $5\frac{2}{3}$ fl.
B. = 2 Thl. — B. = $11\frac{1}{3}$ fl.

3 Thl. = 17 fl. — Summe = 17 fl.
1 Thl. = $5\frac{2}{3}$ fl.

3) A. = 1 Thl. — A. = $29\frac{2}{3}$ fl.
B. = 1 Thl. + 3 fl. — B. = $32\frac{2}{3}$ fl.
C. = 1 Thl. + 8 fl. — C. = $37\frac{2}{3}$ fl.
— Summe = 100 fl.

3 Thl. + 11 fl. = 100 fl. Wenn zu 3 Theilen noch 11 fl. genommen werden, so hat man 100 fl.; also betragen diese

3 Thle. allein nur 89 fl. Sind 3 Thle. = 89 fl., so ist 1 Thl. = $29\frac{2}{3}$ fl.

4) A. = $13\frac{2}{3}$ fl., B. = $15\frac{2}{3}$ fl., C. = $20\frac{2}{3}$ fl.

5) A. = 1 Thl. + 5 fl.
B. = 1 Thl.
C. = 1 Thl. + 3 fl.
D. = 2 Thl. + 5 fl.

5 Thl. + 13 fl. = 100 fl.
5 Thl. = 100 fl. — 13 fl. = 87 fl.
1 Thl. = $17\frac{2}{5}$ fl.

A. = $22\frac{2}{5}$ fl.
B. = $17\frac{2}{5}$ fl.
C. = $20\frac{2}{5}$ fl.
D. = $39\frac{4}{5}$ fl.

Summe = 100 fl.

6) A. = 1 Thl. = $109\frac{1}{11}$ fl.
B. = $\frac{2}{3}$ Thl. = $72\frac{8}{11}$ fl.
C. = 2 Thl. = $218\frac{2}{11}$ fl.
D. = $3\frac{2}{3}$ Thl. = 400 fl.

A.+B.+C.+D. = 800 fl.

c.

1) A. = $\frac{2}{3}$ Thl.
B. = 1 Thl.

$\frac{5}{3}$ Thl. = $\frac{27}{2}$ fl.
$\frac{1}{3}$ Thl. = $\frac{27}{10}$ fl. = 2,7 fl.

A. = 5,4 fl.
B. = 8,1 fl.

Summe = 13,5 fl.

Oder wenn die Verhältnißzahlen in ganzen Zahlen ausgedrückt werden:

A. = 2 Thl. = $5\frac{4}{10}$ fl.
B. = 3 Thl. = $8\frac{1}{10}$ fl.

5 Thl. = $13\frac{1}{2}$ fl.

2) A. = $\frac{1}{2}$ Thl. = 30 fl.
B. = 1 Thl. = 60 fl.
C. = $\frac{1}{6}$ Thl. = 10 fl.

$\frac{10}{6}$ Thl. = 100 fl.

3) A. = $\frac{3}{4}$ Thl. = $59\frac{4}{19}$ fl.
B. = 1 Thl. = $78\frac{18}{19}$ fl.
C. = $\frac{3}{20}$ Thl. = $11\frac{16}{19}$ fl.
D. = $\frac{38}{20}$ Thl. = 150 fl.

$\frac{76}{20}$ Thl. = 300 fl.

4) A. = 1 Thl. + 3 fl. = $16\frac{1}{14}$ fl.
B. = 1 Thl. = $13\frac{1}{14}$ fl.
C. = $\frac{4}{5}$ Thl. + $\frac{2}{5}$ fl. = $40\frac{12}{14}$ fl.

$\frac{14}{5}$ Thl. + $\frac{17}{5}$ fl. = 40 fl.

5) A. = 2 Thl. — 8 fl. = 18 fl.
   B. = 1 Thl. = 13 fl.
   C. = 1 Thl. — 4 fl. = 9 fl.

   4 Thl. — 12 fl. = 40 fl.

6) A. = $1\frac{1}{2}$ Thl. — 8 fl. = $157\frac{6}{19}$ fl.
   B. = 1 Thl. = $110\frac{4}{19}$ fl.
   C. = $\frac{2}{3}$ Thl. + 9 fl. = $82\frac{9}{19}$ fl.
   D. = $\frac{19}{6}$ Thl. + 1 fl. = 350 fl.

   $\frac{38}{6}$ Thl. + 2 fl. = 700 fl.

d.

1) A. = $\frac{1}{3}$ Thl. = $\frac{20}{60}$ Thl. = $66\frac{2}{3}$ fl.
   B. = $\frac{1}{4}$ Thl. = $\frac{15}{60}$ Thl. = 50 fl.
   C. = $\frac{1}{5}$ Thl. = $\frac{12}{60}$ Thl. = 40 fl.
   D. = $\frac{13}{60}$ Thl. = $43\frac{1}{3}$ fl.

   Summe = 200 fl.

Oder:

$\frac{1}{3}$ von 200 fl. = $66\frac{2}{3}$ fl.
$\frac{1}{4}$ von 200 fl. = 50 fl.
$\frac{1}{5}$ von 200 fl. = 40 fl.
200 fl. — ($66\frac{2}{3}$ fl. + 50 fl. + 40 fl.) = 200 fl. — $156\frac{2}{3}$ fl.
= $43\frac{1}{3}$ fl.

2) Wenn A. $\frac{1}{3}$ von der Summe — 5 fl., und B. $\frac{3}{8}$ der Summe + 20 fl. erhält; so bleiben für C. $\frac{13}{24}$ der Summe — 15 fl. übrig. Sind $\frac{13}{24}$ der Summe — 15 fl. = 60 fl.; so ist die ganze Summe = $138\frac{6}{13}$ fl. A. erhält also $41\frac{2}{13}$ fl. und B. $37\frac{4}{13}$ fl.

3) Wenn sie zusammen 12 fl. ziehen, so erhält A. = 3 fl. B. = 4 fl. C. = 5 fl.
   " " " 400 fl. " , " " A. = 100 fl. B. = $133\frac{1}{3}$ fl.
   C. = $166\frac{2}{3}$ fl.

Die Zahlen 3, 4 und 5 sind hier Verhältnißzahlen. Man erhält den bekannten Satz, wenn man die Summe der Verhältnißzahlen zu jeder einzelnen Verhältnißzahl ins Verhältniß setzt; die wirkliche Theilsumme wird erstes Glied des Fragesatzes. Man findet den Antheil jedes Einzelnen, wenn man jede Verhältnißzahl mit der Theilungssumme multipliziert und dieses Produkt durch die Summe der Verhältnißzahlen dividiert.

4) Wenn B. = 8 fl. hat, so erhält C. = 10 fl.,
   " B. = 1 fl. " , " " C. = $\frac{10}{8}$ fl. = $\frac{5}{4}$ fl.,
   " B. = 6 fl. " , " " C. = 6 × $\frac{5}{4}$ fl. = $7\frac{1}{2}$ fl.

Wenn also A. 4 fl. bekommt, so erhält B. 6 fl. und C. $7\frac{1}{2}$ fl.
4 fl. + 6 fl. + $7\frac{1}{2}$ fl. = $17\frac{1}{2}$ fl.

Summe	A.	Summe	B.	Summe	C.
$17\frac{1}{2}$	4	$17\frac{1}{2}$	6	$17\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$
700	x	700	x'	700	x''
x=160 fl.		x'=240 fl.		x''=300 fl.	

In dieser Aufgabe ist die unter 3 Personen zu theilende Summe, so wie das Verhältniß der Theile des A. zu den Theilen des B., und das Verhältniß der Theile des B. zu den Theilen des C. gegeben; die Größe der Theile jedes Einzelnen soll gesucht werden. — Ich habe zuerst aus dem Verhältnisse der Theile des B. zu den Theilen des C. berechnet, wie groß ein Theil von C. im Vergleich mit dem in dem ersten Verhältnisse angegebenen Theile von B. sein müsse; sodann habe ich diese zusammengehörigen Theile addiert, die Zahlen, welche die Summe dieser Theile und den dabei befindlichen Antheil des A. bezeichnen, zu den Gliedern des bekannten Satzes gemacht und hieraus auf die Größe des Antheils von A. an der wirklichen Theilungssumme geschlossen. Auf dieselbe Weise wurde die Größe des Antheils von B. und C. berechnet.

5) Wenn A. 2 fl. bekam, so war die zu theilende Summe = 10 fl.;
" A. 84 fl. " , " " " " " " = 420 fl.

6) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + 1\frac{1}{2} = 2\frac{29}{30}$.

C.	Summe
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{29}{30}$
99	x
x=$195\frac{4}{5}$ fl.	

7) A. = $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$
B. = 2 | 3 | 2
C. = | 4 | $2\frac{2}{3}$
$5\frac{5}{12}$.

B.	C.
3	4
2	x
x = $2\frac{2}{3}$.	

Wenn also A. $\frac{3}{4}$ fl. bekam, so erhielt B. 2 fl. und C. $2\frac{2}{3}$ fl.

Wenn C. $2\frac{2}{3}$ fl. bekam, so bekamen sie zusammen $5\frac{5}{12}$ fl.
" C. 864 fl. " , so war die Summe = 1755 fl.

8) A. = 4
B. = 3 | 2
C. | 4

Wenn B. 3 fl. bekommt, so ist der Antheil des A. = 4 fl.;
" B. 2 fl. " , " " " " " A. = $2\frac{2}{3}$ fl.
So oft also A. $2\frac{2}{3}$ fl. bekommt, so erhält B. 2 fl. und C. 4 fl.

Summe	A.	Summe	B.	Summe	C.
$8\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	2	$8\frac{2}{3}$	4
260	x	260	x′	260	x″
x = 80 fl.		x′ = 60 fl.		x″ = 120 fl.	

§. 28.

Gesellschafts-Rechnungen.

Gesellschafts- und Theilungsrechnungen lehren im Allgemeinen eine Zahl nach gegebenen Verhältnissen theilen. Betrifft der Gegenstand ein gemeinschaftliches Unternehmen, so werden die Verhältnißzahlen Einlagen oder Kapitalien, und die Theilungssumme Dividende genannt.

Es gilt hier folgende Regel:

Um in Gesellschaftsrechnungen die Antheile der einzelnen Theilnehmer zu finden, multiplıziere die Theilungssumme mit jeder Verhältnißzahl und dividiere jedes dieser Produkte durch die Summe der Verhältnißzahlen.

Wenn bei den Gesellschaftsrechnungen bloß Einlage und Gewinn oder Verlust vorkommen, so heißen sie einfache; kommt nebst dem auch Zeit in Betracht, zusammengesetzte Gesellschaftsrechnungen. Bei den letzten müssen die Verhältnißzahlen erst aus Einlage und Zeit bestimmt werden. Man erhält sie, wenn man die Kapitalien mit ihren Zeiten multipliziert.

Beantwortung der Aufgaben.

a.

1) Gewinnt man mit 1400 fl. Einlage 420 fl.; so hat A. mit 500 fl. Einsatz 150 fl. Gewinn, B. mit 600 fl. Einsatz 180 fl. Gewinn, und C. mit 300 fl. Einsatz 90 fl. Gewinn.

In dieser Aufgabe ist der Gesammtgewinn und die Größe der einzelnen Einlagen bekannt; gesucht soll werden der Antheil der einzelnen Theilnehmer an dem Gesammtgewinn. — Die Auflösung beruht auf der Ansicht, daß sich die Gesammteinlage zum Gesammtgewinn verhält, wie die einzelnen Einlagen zum Gewinn der einzelnen Theilnehmer. Bei gleichen Zeiten und ungleichen Einlagen verhalten sich die Gewinnste, wie die Einlagen.

2) A. = 36 fl., B. = 40 fl., C. = 44 fl.

3) C. hat 240 fl. — 160 fl. = 80 fl. gewonnen.

Gewinn. Einlage.	Gewinn. Einlage.	Gewinn. Einlage.
240 : 800	240 : 800	240 : 800
90 : x	70 : x′	80 : x″
x = 300 fl.	$x' = 233\frac{1}{3}$ fl.	$x'' = 266\frac{2}{3}$ fl.

also hat A. 300 fl., B. $233\frac{1}{3}$ fl. und C. $266\frac{2}{3}$ fl. eingelegt.

4) Einlage. Gewinn.
400 : 200
550 : x
x = 275 fl.
Der Gewinn des B. beträgt also 275 fl.

200 fl. + 275 fl. = 475 fl. 600 fl. — 475 fl. = 125 fl.; also hat C. 125 fl. gewonnen, und da der Gewinn immer halb so groß ist, als die Einlage, so hat C. 250 fl. eingelegt.

5) A. = 4800 fl., B. = 6000 fl., C. = 7200 fl., D. = 7500 fl., E. = 4500 fl.

6) Beträgt die Bezahlung für 100 Tage 90 fl.; so erhält A. für 15 Tage $13\frac{1}{2}$ fl., B. für 22 Tage $19\frac{4}{5}$ fl., C. für 26 Tage $23\frac{2}{5}$ fl., D. für 37 Tage $33\frac{3}{10}$ fl.

7) Ist der Gewinn = 450 fl., so war die Einlage = 300 fl.; ist der Gewinn = 750 fl., so war die Einlage = 500 fl. Die Einlage des B. ist eine unwesentliche Bestimmung.

8) A. erhält für 20 Ztnr. 7 Stunden weit zu führen so viel Bezahlung, als wenn er 7 × 20 Ztnr. = 140 Ztnr. 1 Stunde geführt hätte; B. erhält für 26 Ztnr. 5 Stunden weit zu führen so viel Bezahlung, als wenn er 5 × 26 Ztnr. = 130 Ztnr. 1 Stunde weit geführt hätte; C. erhält für 30 Ztnr. 4 Stunden weit zu führen so viel Fuhrlohn, als wenn er 4 × 30 Ztnr. = 120 Ztnr. 1 Stunde weit geführt hätte.

140 Ztnr. + 130 Ztnr. + 120 Ztnr. = 390 Ztnr.

Werden für 390 Ztnr. 1 Stunde weit zu führen 60 fl. bezahlt, so erhält A. für 140 Ztnr. 1 Stunde weit zu führen $21\frac{7}{13}$ fl., B. für 130 Ztnr. 1 Stunde weit zu führen 20 fl. und C. für 120 Ztnr. 1 Stunde weit zu führen $18\frac{6}{13}$ fl. Da nun A. für 140 Ztnr. 1 Stunde weit zu führen, so viel erhält, als für 20 Ztnr. 7 Stunden weit; so erhält er also auch für 20 Ztnr. 7 Stunden weit, $21\frac{7}{13}$ fl. Eben so erhält B. für 26 Ztnr. 5 Stdn. weit zu führen 20 fl., und C. für 30 Ztnr. 4 Stdn. weit zu führen $18\frac{6}{13}$ fl.

Anm. Wollte man hier aus dem Verhältnisse der Summe der Ztnr. und der Summe der Stunden zu dem ganzen Fuhrlohn, auf den Fuhrlohn für die einzelnen Ztnr. und Stunden schließen; so würde man einen durch Nichts begründeten unrichtigen bekannten Satz erhalten, aus dem sich also auch keine richtigen Folgerungen ziehen ließen. Denn 2 Summen aus unter sich ungleichen Posten verhalten sich nicht zu einander, wie 2 einzelne Posten dieser Summen.

9) 4 Arbeiter verdienen in 4 Tagen so viel, als 16 Arbeiter in 1 Tag;
6 〃 〃 〃 2 〃 〃 〃 〃 12 〃 〃 1 〃;
2 〃 〃 〃 6 〃 〃 〃 〃 12 〃 〃 1 〃.

Verdienen 40 Arbeiter in 1 Tage 40 fl., so verdient A. 16 fl., B. 12 fl. und C. 12 fl.

10) A. = $17\frac{71}{107}$ fl., B. = $9\frac{9}{107}$ fl., C. = $27\frac{27}{107}$ fl.

11) Wenn A. $\frac{3}{8}$ hat und verkauft die Hälfte davon, so hat er nur noch $\frac{3}{16}$; von dem, was A. verkauft, erhält B. $\frac{2}{16}$ und C. $\frac{1}{16}$.

Auf $\frac{3}{8}$ des Antheils kommen 1440 fl. Gewinn; also erhält A. mit $\frac{3}{16}$ 720 fl., B. mit $\frac{2}{16}$ 480 fl. und C. mit $\frac{1}{16}$ 240 fl. Gewinn.

12) 600 fl. tragen in 3 Monaten so viel Zins, als 1800 fl. in 1 Monat;
400 〃 〃 〃 5 〃 〃 〃 〃 〃 2000 〃 〃 1 〃;
300 〃 〃 〃 4 〃 〃 〃 〃 〃 1200 〃 〃 1 〃.

Mit 5000 fl. Einlage hat man 500 fl. Gewinn; also hat A. mit 1800 fl. Einlage 180 fl. Gewinn, B. mit 2000 fl. Einlage 200 fl. Gewinn, und C. mit 1200 fl. Einlage 120 fl. Gewinn.

Die Kapitalien tragen in bestimmten Zeiten so viel Zins, als die Produkte, welche entstehen, wenn man die Kapitalien mit ihren Zeiten vervielfacht. Es verhalten sich daher bei ungleichen Kapitalien und ungleichen Zeiten die Gewinnste, wie die Produkte aus den Kapitalien multipliziert mit den Zeiten.

b.

1) A. = $16\frac{44}{91}$ fl., B. = $14\frac{76}{91}$ fl., C. $18\frac{62}{91}$ fl.

2) A. = $53\frac{149}{167}$ fl., B. = $80\frac{140}{167}$ fl., C. = $37\frac{121}{167}$ fl., D. = $52\frac{91}{167}$ fl.

3) Wenn die Einlage und der Gewinn zusammen 120 fl. betragen, so war die Einlage = 100 fl.; wenn daher die Einlage und der Gewinn zusammen 1200 fl. betrugen, so war die Einlage = 1000 fl.

Einl. u. Gewinn	Einlage	Einl. u. Gew.	Einlage
120	100	120	100
1440	x	1800	x′
x = 1200 fl.		x′ = 1500 fl.	

Einl. u. Gewinn	Einlage
120	100
2400	x″

x″ = 2000 fl.

Also hat A. 1000 fl., B. 1200 fl., C. 1500 fl. und D. 2000 fl. eingelegt.

4) Wenn A. vom Gewinn $\frac{1}{3}$, B. $\frac{1}{5}$, C. $\frac{1}{6}$ und D. das Uebrige erhält, so bekommt D. $\frac{9}{30}$ oder $\frac{3}{10}$ vom Gewinn. Sind nun $\frac{3}{10}$ vom Gewinn = 2160 fl., so ist der ganze Gewinn = 7200 fl. A. zieht $\frac{1}{3}$ vom Gewinn, also 2400 fl., B. $\frac{1}{5}$ vom Gewinn, also 1440 fl., C. $\frac{1}{6}$ vom Gewinn, das ist = 1200 fl. Da sie 20 pCt. gewonnen haben, so betrug der Gewinn gerade $\frac{1}{5}$ der Einlage; also hat A. 5 × 2400 fl. = 12000 fl., B. 5 × 1440 fl. = 7200 fl., C. 5 × 1200 fl. = 6000 fl. und D. 5 × 2160 fl. = 10800 fl. eingelegt.

5) A. hatte sein Geld 12 Monate, B. 10 Monate und D. 9 Monate eingelegt. Da sie gleiche Summen einlegten, so richtet sich der Gewinn nur nach der Zeit. Mit andern Worten: Bei gleichen Kapitalien und ungleichen Zeiten verhalten sich die Gewinnste wie die Zeiten.

Monat	fl.	Monat	fl.	Monat	fl.
31	930	31	930	31	930
12	x	10	x′	9	x″
x = 360 fl.		x′=300 fl.		x″=270 fl.	

Also hat A. 360 fl., B. 300 fl., und C. 270 fl. gewonnen.

6) A. hatte sein Geld 12 Monate, B. 9 Monate, C. 8 Monate und D. 6 Monate eingelegt. Man gewinnt eine gewisse Summe Geld in 12 Monaten mit einer Einlage von 6000 fl.; wollte man dieselbe Summe in 1 Monat gewinnen, so müßte man demnach 12×6000 fl. einlegen; will man daher dieselbe Summe in 9 Monaten gewinnen, so muß man $\frac{12\times6000}{9}$ fl. = 8000 fl. einlegen; will man dieselbe Summe in 8 Monaten gewinnen, so muß man $\frac{12\times6000}{8}$ fl. = 9000 fl. einlegen, und will man dieselbe Summe in 6 Monaten gewinnen, so muß man $\frac{12\times6000}{6}$ fl. = 12000 fl. einlegen. Also hat B. 8000 fl., C. 9000 fl. und D. 12000 fl. eingelegt.

7) A. = 840 fl., B. = 600 fl., C. = 360 fl.

8) Der Verwalter erhält $1034\frac{14}{29}$ fl., der Kammerdiener $620\frac{20}{29}$ fl., der Koch $517\frac{7}{29}$ fl. und jeder der 2 Bedienten $413\frac{23}{29}$ fl.

9) Wenn A. 200 fl. vom Gewinn erhält, so bekommt B. 350 fl. — 200 fl. = 150 fl., und da sich die Einlage zum Gewinn verhält, wie 2 zu 1, so hat B. 2 × 150 fl. = 300 fl. eingelegt; folglich war ein Goldstück 5 fl. werth.

10) 300 fl. tragen in 6 Monaten so viel Zins, als 1800 fl. in 1 Monat,
500 fl. = = 4 = = = =, = 2000 = = 1 = ,
200 fl. = = 5 = = = =, = 1000 = = 1 = ,
800 fl. = = 2 = = = =, = 1600 = = 1 = ,
6400 fl.

Einlage	Gewinn	Einlage	Gewinn
6400	768	6400	768
1800	x	2000	x′
x = 216 fl.		x′ = 240 fl.	

Einlage	Gewinn	Einlage	Gewinn
6400	768	6400	768
1000	x″	1600	x‴
x″ = 120 fl.		x‴ = 192 fl.	

Also hat A. 216 fl., B. 240 fl., C. 120 fl. und D. 192 fl. gewonnen.

11)

fl. Einlage	fl. Gewinn
900	240
120	x
x = 32 fl.	

A. gewinnt 240 fl., B. 32 fl., also C. = 820 fl. — 272 fl. = 548 fl.

Gewinn	Einlage
240	900
548	x′
x′ = 2055 fl.	

Also hat B. 32 fl. gewonnen, C. 2055 fl. eingelegt und 548 fl. gewonnen.

12)

Verlust	Einlage
150	1000
450	x
x = 3000 fl.	

Das gemeinschaftliche Kapital war = 3000 fl.

13) Wenn B. 4 zu fordern hat, so hat C. 5 zu fordern; hat also B. 3 zu fordern, so hat C. $\frac{15}{4}$ zu fordern. Beträgt die Forderung des C. $3\frac{1}{3}$, so ist die des D. = 6; hat aber C. $\frac{15}{4}$ zu fordern, so ist die Forderung des D. = $\frac{27}{4}$. Wenn also A. 2 zu fordern

hat, so hat B. 3, C. $\frac{15}{4}$ und D. $\frac{27}{4}$ zu fordern. Die Forderungen der 4 Gläubiger verhalten sich mithin zu einander, wie 2, 3, $\frac{15}{4}$, $\frac{27}{4}$; oder wie $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{27}{4}$; oder, da sich Brüche mit gleichen Nennern verhalten, wie ihre Zähler: wie 8, 12, 15, 27.

Wären nun 62 fl. zu vertheilen, so erhielte A. 8 fl., B. 12 fl., C. 15 fl. und D. 27 fl.; es sind aber 51×62 fl. = 3162 fl. zu vertheilen; also erhält A. 51×8 fl. = 408 fl., B. 51×12 fl. = 612 fl., C. 51×15 fl. = 765 fl., D. 51×27 fl. = 1377 fl.

Schriftliche Darstellung.

A. = 2			2	$^8/_4$	8	408 fl.
B. = 3	4		3	$^{12}/_4$	12	612 fl.
C. =	5	$3^1/_3$	$^{15}/_4$	$^{15}/_4$	15	765 fl.
D. =		6	$^{27}/_4$	$^{27}/_4$	27	1377 fl.
					Summe = 62	3162 fl.

B.	C.		C.	D.
4	5		$3^1/_3$	6
3	x		$^{15}/_4$	x'
$x = {}^{15}/_4$			$x' = {}^{27}/_4$.	

Summe	A.	B.	C.	D.
62	8	12	15	27
3162	?	?	?	?

14) C. erhält von 100 fl. 12 fl. für seine Bemühungen, also von 2000 fl. 20×12 fl. = 240 fl.; mithin ist der noch zu theilende Gewinn 6990 fl. — 240 fl. = 6750 fl. Die gemeinschaftliche Einlage ist 4000 fl. + 3000 fl. + 2000 fl. = 9000 fl. Werden mit 9000 fl. 6750 fl. gewonnen, so kommen auf 1000 fl. der Einlage $^{6750}/_9$ fl. = 750 fl. vom Gewinn; also hat A. 4×750 fl. = 3000 fl., B. 3×750 fl. = 2250 fl., und C. 2×750 fl. = 1500 fl. gewonnen. C. erhält im Ganzen 1740 fl.

15) 2000 fl. tragen in 6 Jahren so viel Zins, als 12000 fl. in 1 Jahre,
1500 „ „ „ 4 „ „ „ „ „ 6000 fl. „ 1 „ ,
3000 „ „ „ $\frac{5}{2}$ „ „ „ „ „ 7500 fl. „ 1 „ ,
25500 fl.

Einlage	Gewinn	Einlage	Gewinn
25500	4000	25500	4000
12000	x	6000	x′

$x = 1882\frac{6}{17}$ fl. $x' = 941\frac{3}{17}$ fl.

Einlage	Gewinn
25500	4000
7500	x″

$x'' = 1176\frac{8}{17}$ fl.

Also hat A. $1882\frac{6}{17}$ fl. Gewinn
B. $941\frac{3}{17}$ „ „
C. $1176\frac{8}{17}$ „ „

16)

fl. Einlage	fl. Gewinn	Monate.
40	60	8
50	80	x

$x = 8\frac{8}{15}$ Monaten.

Mon.	fl. Gew.	fl. Einl.
8	60	40
6	100	x′

$x' = 88\frac{8}{9}$ fl.

40 fl. + 50 fl. + $88\frac{8}{9}$ fl. = $178\frac{8}{9}$ fl. Also hat des B. Geld $8\frac{8}{15}$ Mon. ausgestanden, C. hat $88\frac{8}{9}$ fl. eingelegt, und die ganze Einlage ist = $178\frac{8}{9}$ fl.

§. 29.

Auf- oder Wechselgeld-, Waaren-, Gewinn- und Verlust-Rechnungen.

a.

1) 500 Kronenthaler sind 1350 fl. Hat man nun für 500 Stück Kronenthaler 1390 fl. 30 Kzr. erhalten, so hat man $40\frac{1}{2}$ fl. gewonnen. Werden an 1350 fl., $40\frac{1}{2}$ fl. gewonnen, so werden an 100 fl., 3 fl. gewonnen; also betrug das Auf- oder Wechselgeld (Agio, sprich: Aschio) 3 pCt.

Unter Agio oder Auf- oder Wechselgeld versteht man den Unterschied, welcher beim Wechsel irgend einer Geldsorte gegen eine andere entsteht.

2) 500 Dukaten zu 5 fl. 30 Kzr. sind = 2750 fl. Werden an 5 fl., 4 Kzr. gewonnen, so werden an 2750 fl., 36 fl. 40 Kzr. gewonnen.

3) 800 Kronenthaler = 2160 fl. Werden an 100 fl., 2 fl. gewonnen; so werden an 2160 fl. $43\frac{1}{5}$ fl. gewonnen.

4) 2000 preußische Sechstelsthaler zu $17\frac{1}{2}$ Kzr. = 583 fl. 20 Kzr.; also wurden 14 fl. verloren.

5) 1450 Pfd. — 45 Pfd. = 1405 Pfd.; $\frac{1405 \times 45}{60 \times 2} = 526\frac{7}{8}$ fl.

6)

Pfd. Brutto	Pfd. Tara		Pfd. Netto	fl.
100	8	2848 ℔ — $227\frac{21}{25}$ ℔	100	172
2848	x	= $2620\frac{4}{25}$ ℔	$2620\frac{4}{25}$	x
$x = 227\frac{21}{25}$ ℔			$x = 4506\frac{422}{625}$ fl.	

7) a. $468\frac{7727}{10000}$ fl. b. $23\frac{3}{10}$ Kzr. 8) $85\frac{73}{75}$ fl.

9) Kommen Gewichtsabgang (Tara) und Gutgewicht zugleich vor, so wird gewöhnlich der Gewichtsabgang zuerst vom Gesammtgewicht abgerechnet, und dann vom Reste das Gutgewicht. Ist die Waare nicht theuer, so werden bei der Berechnung des Gewichtsabgangs und des Gutgewichts die Brüche, welche unter $\frac{1}{2}$ Pfd. sind, außer Acht gelassen, die über $\frac{1}{2}$ Pfd. aber für 1 Pfd. gerechnet.

Zieht man von 1550 Pfd. von jedem Hundert 12, also im Ganzen 186 Pfd. ab, so bleiben 1364 Pfd.; davon $1\frac{1}{2}$ v. H. Gutgewicht, also 20 Pfd. (da $\frac{23}{50}$ Pfd. weniger als $\frac{1}{2}$ Pfd. ist, also nicht in die Rechnung aufgenommen wird), bleiben 1344 Pfd. Netto.

Pfd. Netto	fl.
100	48
1344	x
$x = 645\frac{3}{25}$ fl.	

Also kostet die Waare $645\frac{3}{25}$ fl.

10) Die Waare mit den Fässern (brutto) wiegt 2090 Pfd., davon gehen 8 v. H. ab, bleiben 1923 Pfd.; ferner ab $\frac{3}{4}$ v. H. Gutgewicht, bleiben 1909 Pfd.; endlich 6 v. H. für beschädigte Waare (Fusti) abgerechnet, bleiben 1794 Pfd. Lauter oder Netto und 115 Pfd. beschädigte Waare. 1794 Pfd. Netto zu 40 Kzr. = 1196 fl.; 115 Pfd. beschädigte Waare zu 28 Kzr. = $53\frac{2}{3}$ fl.; Summe = $1249\frac{2}{3}$ fl.

11) $1\frac{1}{5}$ Ztnr. + $1\frac{7}{8}$ Ztnr. + $1\frac{1}{2}$ Ztnr. + $1\frac{4}{5}$ Ztnr. = $6\frac{3}{8}$ Ztnr. = $637\frac{1}{2}$ Pfd.

Bekommt man für $21\frac{1}{3}$ Kzr. 1 Pfd.; so bekommt man für 196 fl., $551\frac{1}{4}$ Pfd. $637\frac{1}{2}$ Pfd. — $551\frac{1}{4}$ Pfd. = $86\frac{1}{4}$ Pfd.; also betrug die Tara oder der Gewichtsabgang $86\frac{1}{4}$ Pfd.

12) Sind 960 Pfd. von der geringeren Sorte dabei, so hat man

4897 Pfd. — 960 Pfd. = 3937 Pfd. von der bessern Sorte. 3937 Pfd. zu 22 Kzr. = 1443 fl. 34 Kzr. $2\frac{1}{2}$ Pfd. vom bessern = 55 Kzr. Kosten 4 Pfd. der geringeren Sorte 55 Kzr., so kosten 960 Pfd. 220 fl. Also beträgt die ganze Zahlung 1443 fl. 34 Kzr. + 220 fl. = 1663 fl. 34 Kzr.

b.

1) Wenn man 80 Ellen um 240 fl. kauft, so kostet 1 Elle 3 fl. Will man mit 100 fl. 20 fl. gewinnen; so muß für 120 fl. verkauft werden, was man um 100 fl. eingekauft hat. Ist also die Einkaufssumme 100 fl., so ist die Verkaufssumme 120 fl.; die Elle wurde für 3 fl. gekauft, mithin muß sie für $3\frac{3}{5}$ fl. verkauft werden.

Es ist die Einkaufssumme einer bestimmten Anzahl Einheiten einer Waare und der Gewinn v. H. beim Verkauf gegeben; der Verkaufspreis einer Einheit der Waare soll gesucht werden. — Ich habe zuerst aus dem Verhältniß der Waarenmenge zur ganzen Einkaufssumme auf den Einkaufspreis 1 Einheit der Waare geschlossen, sodann aus dem angegebenen Gewinn v. H. das Verhältniß der Einkaufssumme zur Verkaufssumme gebildet, und aus diesem Verhältnisse und dem Einkaufspreise einer Einheit auf den Verkaufspreis einer Einheit geschlossen.

2) Er verkauft 25 Ellen um 85 fl. + $12\frac{1}{2}$ fl. = $97\frac{1}{2}$ fl.; also 1 Elle um $3\frac{9}{10}$ fl.

3) Wenn 210 Pfd. 630 fl. kosten, so kostet 1 Pfd. 3 fl.; das Pfd. wird um 3 fl. 12 Kzr. verkauft, also kostet 1 Loth $\frac{1}{10}$ fl. = 6 Kzr.

4) Er verliert 6 vom Hundert; was er also um 94 fl. verkauft, das hat er um 100 fl. eingekauft, und da er die Wiese um 987 fl. verkauft hat, so hat sie ihn demnach beim Einkauf 1050 fl. gekostet.

5) Ist die Verkaufssumme = $94\frac{1}{4}$ fl., so ist die Einkaufssumme = 100 fl.;
" " " = 377 fl., " " " " = 400 fl.

6) 16 fl. 48 Kzr. — 12 fl. 15 Kzr. = 4 fl. 33 Kzr.

Ohm	fl.
1	$4\frac{33}{60}$
$35\frac{1}{2}$	x

$x = 161\frac{21}{40}$ fl.

Also hat er an 1 Ohm 4 fl. 33 Kzr. und im Ganzen $161\frac{21}{40}$ fl. verloren.

Einlage	Verlust
$16\frac{4}{5}$	$4\frac{11}{20}$
100	x′

$x' = 27\frac{7}{84}$ prc.

Der an einem Geschäfte gemachte Gewinn oder Verlust läßt sich entweder so bestimmen, daß man angibt, wie viel mit dem angelegten Kapital (Anlage-Kapital) gewonnen oder verloren wird, oder indem man berechnet, wie viel dieser Gewinn oder Verlust für Hundert oder wie viel Prozent er beträgt.

Bezeichnet man die Einkaufsumme mit E, die Verkaufssumme mit V, den Gewinn vom Hundert mit $+p$, den Verlust v. H. mit $-p$; so ist: $E : V = 100 : 100 \pm p$.

7)

Einkaufsumme	Verkaufsumme	
100	125	Kostet 1 Ohm = 100 Maß, 60 fl.;
48	x	so kostet 1 Maß 36 Kzr.

$x = 60$ fl.

8) Wenn man in 1 Jahr 12 v. H. Rabatt erhält, so bekommt man in 3 Monaten 3 v. H. Rabatt; also dürfen bei baarer Bezahlung von 900 fl., 27 fl. abgezogen werden. 900 fl. — 27 fl. = 873 fl.

Einkaufs.	Verkaufs.	
100	130	Kosten 2000 Pfd. = $\frac{13 \times 873}{10}$ fl., so kostet
873	x	1 Pfd. beim Verkauf $34\frac{47}{1000}$ Kzr.

$x = \frac{13 \times 873}{10}$ fl.

9)

fl. Einlage	fl. Gewinn	Monate
100	40	12
24	4	x

$x = 5$ Mon.

10) Ist die Verkaufsumme 106, so ist die Einkaufsumme 100;
„ „ „ 53, „ „ „ „ 50.

Also wurde der Ztnr. für 50 fl. eingekauft.

Ist die Einkaufsumme 100, so ist die Verkaufsumme 90;
„ „ „ 50, „ „ „ „ 45.

Also wurde zuletzt der Ztnr. für 45 fl. verkauft, mithin kostete 1 Pfd. = $\frac{45 \times 60}{100}$ Kzr. = 27 Kzr.

In der Aufgabe war der Gewinn v. H. bei dem ersten Verkauf und die erste Verkaufsumme, und der Verlust v. H. beim zweiten Verkauf gegeben, und es sollte der Preis einer Einheit der Waare beim zweiten Verkauf berechnet werden. — Ich habe zuerst aus dem Gewinn v. H. das Verhältniß der ersten Verkaufsumme zur Einkaufsumme in ganzen Zahlen ausgedrückt, und aus diesem Verhältnisse und der wirklichen ersten Verkaufsumme die Einkaufsumme berechnet; sodann habe ich aus

dem angegebenen Verluste v. H. das Verhältniß der Einkaufsumme zur Verkaufsumme beim zweiten Verkaufe gefolgert, aus diesem Verhältnisse und der wirklichen Einkaufsumme den Preis eines Zentners beim zweiten Verkaufe berechnet, und endlich aus dem Preise eines Zentners auf den Preis eines Pfundes geschlossen.

Oder:

1te Verkaufs.	2te Verkaufs.	
106	90	100 Pfd. = 45 fl.
53	x	1 Pfd. = 27 Kzr.

x = 45 fl.

Ich habe hier aus dem Verhältnisse der ersten Verkaufsumme zur zweiten den bekannten Satz gebildet; die wirkliche erste Verkaufsumme wurde erstes Glied im Fragesatze.

11) Ist die Verkaufsumme 80, so ist die Einkaufsumme 100;
" " " 24, " " " " 30.
Also wurde die Elle für 30 Kzr. eingekauft.
Was beim Einkauf 100 Kzr. kostet, wird für 110 Kzr. verkauft;
" " " " 30 Kzr. " , " " 33 Kzr. " .
Mithin wurde zuletzt die Elle für 33 Kzr. verkauft.

12) Ist die Einkaufs. 100 Kzr., so ist die Verkaufs. 120 Kzr.;
" " " 24 Kzr., " " " " $28\frac{4}{5}$ Kzr.

13) Ist die Verkaufs. = 110 fl., so ist die Einkaufs. = 100 fl.;
" " " = 18 fl., " " " " = $16\frac{4}{11}$ fl.
Also kostete die Ohm beim Ankauf $16\frac{4}{11}$ fl.
Ist die Einkaufs. = 100 fl., so ist die Verkaufs. = 88 fl.;
" " " = $16\frac{4}{11}$ " " " " " = $14\frac{2}{5}$ fl.
Mithin wurde die Ohm um $14\frac{2}{5}$ fl. verkauft.

14) Diesjähriger Ertrag. Vorjähriger Ertrag.

Diesjähriger Ertrag.	Vorjähriger Ertrag.
108	100
1890	x

x = 1750 fl.

15) A = $\frac{1}{3}$ Theil
B = $\frac{2}{3}$ Theil
C = $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ Theil = $\frac{1}{2}$ Theil
also behält B = $\frac{2}{3}$ Theil — $\frac{1}{2}$ Theil = $\frac{1}{6}$ Theil.

Verkaufs.	Einkaufs.
120	100
$16\frac{1}{5}$	x

x = $13\frac{1}{2}$ Kzr.

$13\frac{1}{2}$ Kzr. = $\frac{27}{2 \times 60}$ fl. = $\frac{9}{40}$ fl.

fl.	Pfd.
$\frac{9}{40}$	1
135	x′

x′ = 600 Pfd.

1 Pfd. im Einkauf kostete $13\frac{1}{2}$ Kzr.

Also waren es im Ganzen 600 Pfd. Zucker. A erhielt davon $\frac{1}{3}$ Theil = 200 Pfd.; B $\frac{1}{6}$ Theil = 100 Pfd.; C $\frac{1}{2}$ Theil = 300 Pfd.

§. 30.

Mischungs-Rechnungen.

Die Mischungs- oder Alligationsrechnung wird angewendet beim Mischen von Metallen, Getreidearten, Weinsorten, überhaupt von solchen gleichartigen Dingen, die unter sich eine Verbindung oder Mischung zulassen, wodurch entweder ein mittlerer Gehalt, Werth oder Preis im Verhältnisse der gegebenen bekannten Theile bestimmt wird, oder wodurch die Theile aufgefunden werden, die aus der angegebenen Quantität (Menge) zur Mischung erforderlich sind.

Man unterscheidet daher bei den Mischungsrechnungen zwei Hauptarten:

1) Diejenige Rechnung, in welcher das Werthverhältniß der zu mischenden Sorten angegeben, und der mittlere Gehalt, Werth oder Preis der Mischung zu wissen verlangt wird. Diese Art ist eigentlich eine Durchschnittsrechnung.

2) Diejenige Rechnung, in welcher der Gehalt, Werth oder Preis zweier oder mehrerer Sorten angegeben ist, und aufgefunden werden soll, wie viel man von jeder der zu mischenden Sorten zu nehmen habe, damit aus deren Mischung ein gegebener mittlerer Gehalt, Werth oder Preis entstehe. Diese Art ist die eigentliche Mischungsrechnung.

a.

1) Wenn 1 Maß 14 Kzr., 1 Maß 19 Kzr. und die dritte 30 Kzr. kostet, so hat man 3 Maß, welche zusammen 63 Kzr. kosten; also kostet 1 Maß 21 Kzr.

Es sind hier Dinge von verschiedenem Werthe gegeben, und man soll den Mittelwerth suchen. Von jeder der zu mischenden Sorten kommt nur 1 Einheit in Rechnung. — Ich habe den verlangten Mittelwerth erhalten, indem ich die Summe der Werthe durch die Summe der Einheiten getheilt habe.

2) 1 Pfd. zu 17 Kzr.
1 " zu 20 "
1 " zu 23 "
1 " zu 28 "
4 Pfd. kosten 88 Kzr.
also 1 Pfd. = 22 Kzr.

3) 4 Schoppen zu 12 Kzr. = 48 Kzr.
3 " zu 10 " = 30 "
5 " zu 6 " = 30 "
12 Schoppen kosten 108 Kzr.
1 Schoppen = 9 Kzr.

Es kommen bei 3) von jeder der zu mischenden Sorten mehrere Einheiten in Rechnung. Ich habe den verlangten Mittelwerth erhalten, indem ich den Werth der Einheiten jeder zu mischenden Sorte berechnet, diese Werthe zusammengezählt und die dadurch erhaltene Summe durch die Anzahl aller Einheiten getheilt habe.

4) 2 Maß zu 14 Kzr. kosten 28 Kzr.
4 " zu 17 " " 68 "
2 " Wasser " 0 "
8 Maß Mischung kosten 96 Kzr.
1 " " = 12 "

5) 12 Mark 13löthiges Silber enthalten 156 Loth Silber,
6 " 14 " " " 84 " " ,
2 " Kupfer.
Unter 20 Mark Mischung befinden sich 240 Loth Silber;
also sind unter 1 Mark Mischung 12 Loth Silber.

6) Wenn zu 4 Mltr. Korn 3 Mltr. Kernen kommen, so hat man 7 Mltr. Mischung.

Mltr. Misch.	Mltr. Korn	Mltr. Misch.	Mltr. Kern.
7	4	7	3
210	x	210	x'
$x' = 120$ Mltr.		$x' = 90$ Mltr.	

7) 4 Maß + 5 Maß + 3 Maß + 2 Maß = 14 Maß Mischung.
Unter 14 Maß Mischung sind 4 Maß 12 Batzenwein;
" 266 " " " 76 " 12 " .
76 Maß zu 12 Batzen = $60\frac{4}{5}$ fl.

8) Unter 6 Mark 10löthigem Silber befinden sich 60 Loth Silber; nimmt man dazu 2 Mark Kupfer, so hat man 8 Mark Mischung, welche 60 Loth Silber enthalten; also 1 Mark = $7\frac{1}{2}$ Loth.

9) Bekommt man für 24 Kzr. 1 Maß Wein, so bekommt man für 20 Kzr. nur $\frac{5}{6}$ Maß Wein. Befindet sich bei 1 Maß Mischung $\frac{5}{6}$ Maß Wein, so ist $\frac{1}{6}$ Maß Wasser dabei.

10) Beträgt die Mischung 24 Karat, so sind 20 Karat reines Gold dabei. Beträgt die Mischung 24 Mark, so sind 20 Mark reines Gold dabei; beträgt die Mischung 36 Mark, so befinden sich 30 Mark reines Gold darunter.

11) Hat man 18 Karat fein Gold, so beträgt die Mischung 24 Karat;
" " 18 Mark " " , " " " " 24 Mark;
" " 28 " " " , " " " " $37\frac{1}{3}$ Mark.

12)

Batzen	Maß Wein	Maß. Misch.	Maß Wasser
8	1	1	$\frac{3}{8}$
5	x	96	x′

$x = \frac{5}{8}$ Maß Wein $\qquad x' = 36$ Maß.

Also sind bei einer Maß Mischung $\frac{3}{8}$ Maß Wasser, und bei 96 Maß Mischung 36 Maß Wasser.

Anm. Man hat in Deutschland für Gold und Silber ein eigenes Gewicht, die Mark, welche beim Silber in 16 Loth zu 18 Grän, beim Gold in 24 Karat zu 12 Grän eingetheilt wird. Diese Metalle werden selten ganz rein verarbeitet, sondern erhalten meistens einen Zusatz von andern Metallen, theils um die Masse zu vermehren, ohne den Preis zu erhöhen, theils um ihnen mehr Härte zu geben, weil sie ohne Zusatz namentlich zum Gebrauch als Münzen zu weich sein würden. Dieses Mischen heißt man gewöhnlich legieren, beim Golde auch karatieren. Das Silber erhält meistens einen Zusatz von Kupfer, das Gold einen Zusatz von Kupfer oder Silber, oder von beiden; eine nicht gemischte Mark Gold oder Silber wird eine feine Mark, eine gemischte (legierte) Mark wird eine rauhe Mark genannt. Ist das Gold oder Silber ohne allen Zusatz von einem andern Metalle, so nennt man ersteres 24karatiges Gold, letzteres 16löthiges Silber. Die Menge des Goldes oder Silbers, welche in einer gemischten Masse enthalten ist, bestimmt den Gehalt oder Feingehalt (§. 38). So viel Karate reines Gold in einer rauhen Mark enthalten sind, so viel karatig heißt das Gold oder vielmehr die Masse; so viele Loth eine Mark an reinem Silber enthält, so viel löthig heißt die Masse. Ist z. B. das Gold nach dem Verhältniß gemischt, daß auf die Mark 22 Karat Gold und 2 Karat Kupfer kommen, so heißt die Mischung 22karatiges Gold; ist das Silber nach dem Verhältniß gemischt, daß auf jede Mark 10 Loth Silber und 6 Loth Kupfer kommen, so nennt man die Masse 10löthiges Silber. Bei uns werden aus einer Mark Silber $24\frac{1}{2}$ fl. in Guldenstücken und 28 fl. in Groschen und Sechsern geprägt. Die Kronenthaler sind 13löthig. Man bezeichnet gewöhnlich feines Gold durch das Zeichen ☉ und feines Silber durch ☾. Das Zeichen des Kupfers ist ♀. — Allein nicht nur Gold und Silber, sondern auch andere Metalle werden gemischt, z. B. das Zinn, welches meistens einen Zusatz von Blei erhält.

Das Verhältniß der Mischung wird dadurch ausgedrückt, daß man bestimmt, unter wie viel Pfund der ganzen Mischung ein Pfund Blei ist; man nennt das Zinn 4pfündig, wenn zu 3 Pfund reinem Zinn 1 Pfund Blei gemischt ist, 8pfündig, wenn zu 7 Pfd. reinem Zinn 1 Pfund Blei, 10pfündig, wenn zu 9 Pfund Zinn 1 Pfund Blei geschmolzen wurde.

b.

1) Es ist gefragt, wie viel man von jeder der zu mischenden Waaren zu nehmen habe, damit eine gegebene Menge entstehe, und jede Einheit der Mischung den verlangten Mittelwerth habe.

Auflös. a. Gibt man 1 Maß 12Batzenwein um 10 Batzen, so verliert man 2 Batzen; man findet diesen Verlust, wenn man den Mittelwerth von dem Werthe einer Einheit der bessern Sorte abzieht. Gibt man 1 Maß 7Batzenwein um 10 Batzen, so gewinnt man 3 Batzen; man findet diesen Gewinn, wenn man den Werth einer Einheit der geringeren Sorte vom Mittelwerthe abzieht. Da man Nichts gewinnen und Nichts verlieren, sondern nur mischen will; so darf man nur so viel vom 7Batzenwein geben, daß 2 Batzen daran gewonnen werden, d. h. so oft man 1 Maß des bessern um 10 Batzen gibt, muß man so viel des geringern um 10 Batzen geben, daß Gewinn und Verlust sich heben.

Gewinnt man 3 Batzen an 1 Maß 7 Batzenwein,
so „ „ 1 „ „ $\frac{1}{3}$ „ „ „ ,
und 2 „ „ $\frac{2}{3}$ „ „ „ .

Es gehören also zu 1 Maß des bessern, $\frac{2}{3}$ Maß des geringern, oder zu $\frac{3}{3}$ Maß des bessern, $\frac{2}{3}$ Maß des geringern, also zu 3 Maß des bessern 2 Maß des geringern, wodurch 5 Maß Mischung entstehen. Wollte man 5 Maß mischen, so müßte man 3 Maß des bessern und 2 Maß des geringern nehmen; man will aber 200 Maß, also 40×5 Maß mischen, folglich muß man vom bessern $40 \times 3 = 120$ Maß, und vom geringern $40 \times 2 = 80$ Maß nehmen.

Es ist leicht, sich von der Richtigkeit dieser Rechnung zu überzeugen. 120 Maß zu 12 Batzen kosten 1440 Batzen; 80 Maß zu 7 Batzen kosten 560 Batzen. Kosten die 200 Maß Mischung 1440 Batzen + 560 Batzen = 2000 Batzen, so kostet 1 Maß 10 Batzen.

Ich habe untersucht, wie viel Theile des Werthes verloren gehen, wenn man 1 Einheit der bessern Sorte für 1 Einheit der verlangten Mittelsorte, und wie viel Theile des Werthes gewonnen werden, wenn

man 1 Einheit der geringern Sorte für 1 Einheit der verlangten Mittelsorte gibt; sodann habe ich berechnet, wie viele Einheiten der geringern Sorte genommen werden müssen, damit der sich dadurch herausstellende Gewinn dem Verluste gleichkomme, der entsteht, wenn man 1 Einheit der bessern Sorte für 1 Einheit der verlangten Mittelsorte gibt, und habe die zusammengehörigen Mengen oder die auf diese Weise erhaltenen Verhältnißzahlen addiert. So oft nun die Summe der zusammengehörigen Einheiten beider Sorten in der Summe der Einheiten der verlangten Menge enthalten ist; so oft muß man von jeder der beiden Sorten die zuerst berechnete Menge nehmen. — Um mich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, habe ich den Werth der von jeder Sorte zur Mischung genommenen Einheiten und die ganze Mischung berechnet, wenn für jede Einheit der Mittelwerth gesetzt wird, und habe aus der Uebereinstimmung dieser Summen auf die Richtigkeit der Rechnung geschlossen.

Schriftliche Darstellung.

200 Maß zu 10 Batzen.

A.	1 Maß = 12 Batzen	(—) 2 Bzn.	1 Mß.	$\frac{3}{3}$ Mß.	3 Mß.	120 Mß.
B.	1 Maß = 7 Batzen	(+) 3 Bzn.	$\frac{2}{3}$ „	$\frac{2}{3}$ „	2 „	80 „
					5 Mß.	200 Mß.

Was verloren wird, ist durch (—), was gewonnen wird, durch (+) bezeichnet.

Bzn.	Mß. B	Mischung	A	Mischung	B
3	1	5	3	5	2
2	x	200	x′	200	x″
$x = \frac{2}{3}$ Mß.		x′ = 120 Mß.		x″ = 80 Mß.	

Wird der Werth einer Einheit der besseren Sorte allgemein durch a, der Werth einer Einheit der geringeren Sorte durch b, der Mittelwerth durch m, die Menge der Mischung durch s bezeichnet; so erhält man:

A. a	(—) a — m	1	$\frac{m-b}{m-b}$	m — b	$\frac{(m-b)\,s}{a-b}$
m					
B. b	(+) m — b	$\frac{a-m}{m-b}$	$\frac{a-m}{m-b}$	a — m	$\frac{(a-m)\,s}{a-b}$
				a — b	s

Gewinn	Einh. B	Mischung	A	Mischung	B
m — b	1	a — b	m — b	a — b	a — m
a — m	x	s	y	s	z
$x = \frac{a-m}{m-b}$		$y = \frac{(m-b)\,s}{a-b}$		$z = \frac{(a-m)\,s}{a-b}$.	

Aus dieser Auflösungsweise ergibt sich folgende Regel:

Wenn zwei zu mischende Sorten, die Summe (Menge) der Mischung und der Mittelwerth gegeben sind, und aufgefunden werden soll, wie viel man von jeder der zu mischenden Sorten zu nehmen habe; so ziehe von dem Werthe einer Einheit der bessern Sorte den Mittelwerth, und sodann vom Mittelwerthe den Werth einer Einheit der geringeren Sorte ab. Es verhält sich alsdann die Menge, welche von der geringeren Sorte zu nehmen ist, zu der Menge, welche von der besseren Sorte zu nehmen ist, wie die erste der Differenzen zur zweiten. Nehme daher den ersten Unterschied als Verhältnißzahl für die geringere Sorte, den zweiten Unterschied als Verhältnißzahl für die bessere Sorte, nehme die Summe der Verhältnißzahlen und jede einzelne Verhältnißzahl zu den Gliedern des bekannten Satzes einer Zweisatzrechnung, und die Summe der Mischung zum ersten Glied des Fragesatzes.

Das in der Anmerkung §. 26. C. 1. c. Gesagte ist auch hier zu befolgen.

Auflösung b.: An 1 Maß des 7 Batzenweins werden $1\frac{1}{2}$ Mal so viel gewonnen, als an 1 Maß des 12 Batzenweins verloren wird, wenn von beiden Sorten die Maß zu 10 Batzen gegeben wird; denn an 1 Maß des 7 Batzenweins werden 3 Batzen gewonnen und an 1 Maß des 12 Batzenweins nur 2 Batzen verloren. Man muß daher, um den Verlust dem Gewinne gleichzusetzen, $1\frac{1}{2}$ Mal so viel vom bessern nehmen, als vom geringern. Nimmt man also 1 Maß oder $\frac{2}{2}$ Maß des geringern Weines, so muß man $1\frac{1}{2}$ Maß $= \frac{3}{2}$ Maß vom bessern nehmen, oder wenn 2 Maß des geringern genommen werden, so müssen 3 Maß des bessern genommen werden. So oft man also 5 Maß Mischung hat, so sind 2 Maß 7 Batzenwein und 3 Maß 12 Batzenwein dabei, folglich befinden sich unter 200 Maß Mischung 80 Maß des geringern und 120 Maß des bessern Weines.

Auflösung c.: Würde man jedes Mal zu 1 Maß des 12 Batzenweins 1 Maß des 7 Batzenweins nehmen und diese Mischung so oft wiederholen, bis man 200 Maß gemischten Wein hätte; so würde man im Ganzen 100 Batzen gewinnen, wenn man für 1 Maß Mischung 10 Batzen erhielte. Nähme man nur 1 Maß des geringern heraus und würde dafür 1 Maß des

bessern hinein thun, so würden durch diesen Wechsel 5 Batzen verloren; da aber 20×5 Batzen verloren werden sollen, so müßte man 20 Maß des geringern herausnehmen und dafür 20 Maß des bessern hineinthun. Folglich erhält man 200 Maß zu 10 Batzen, wenn man vom 7 Batzenwein 100 — 20 = 80 Maß und vom 12 Batzenwein 100 + 20 = 120 Maß nimmt.

Man kann sich die Aufgabe auch so vorstellen: A will von B 200 Maß Wein zu 10 Batzen kaufen, also im Ganzen 2000 Batzen ausgeben; B hat zweierlei Wein, nämlich zu 12 und zu 7 Batzen die Maß. Nähme nun A von jeder Sorte 100 Maß, so müßte er dafür 1900 Batzen bezahlen; da er aber für 200 Maß 2000 Batzen ausgeben will, so müßte er so oft 1 Maß des geringern zurückgeben und dafür 1 Maß des bessern nehmen, bis er wegen dieses Tausches 100 Batzen weiter zu bezahlen hätte, u. s. w., wie oben.

Oder: 200 Maß zu 12 Batzen würden 2400 Batzen kosten, also 400 Batzen zu viel; mithin muß so viel von der geringern Sorte genommen werden, daß 400 Batzen gewonnen werden. Ersetzt man 1 Maß des bessern durch 1 Maß des geringern, so werden 5 Batzen gewonnen. Gewinnt man 5 Batzen an 1 Maß; so gewinnt man 400 Batzen an 80 Maß u. s. w. — Sucht man also zuerst, um wie viel die 200 Maß höher zu stehen kommen würden, als die Mischung, wenn aller Wein von der bessern Sorte genommen würde; so muß alsdann dieser Ueberschuß des Preises durch verhältnißmäßiges Weglassen vom bessern und Ersetzen mit geringerm Weine bis zu dem festgestellten Preise heruntergebracht werden.

2) Erhält man für 7 Batzen 1 Maß Wein; so bekommt man für 5 Batzen nur $\frac{5}{7}$ Maß Wein, und der Rest, also $\frac{2}{7}$ Maß, ist Wasser. Befinden sich unter 1 Maß Mischung $\frac{2}{7}$ Maß Wasser, so sind unter 84 Maß Mischung 24 Maß Wasser.

3)

Kernen das Mltr. zu 9 fl.	(—) 1 fl.	1 Mltr.	2 Mltr.	120 Mltr.
Korn " " zu 6 fl.	(+) 1 fl.	½ Mllt.	1 Mltr.	60 "
180 Mltr. Mischung à 8 fl.			3 Mltr.	180 Mltr.

Gewinn	Mltr. Korn.
2	1
1	x

$x = \frac{1}{2}$ Mltr.

Ist die Mischung = 3 Mltr., so hat man 2 Mltr. Kernen und 1 Mltr. Korn; ist die Mischung = 3 × 60 = 180 Mltr., so hat man 2 × 60 = 120 Mltr. Kernen und 1 × 60 = 60 Mltr. Korn.

4)

A 1 Mark zu 14 Lth.	(−) 3 Lth.	1 Mark	5 Mark	60 Mark
B 1 Mark zu 6 =	(+) 5 =	$\frac{3}{5}$ =	3 =	36 =
96 Mark zu 11 Loth.			8 Mark.	96 Mark.

Gewinn M.	B.	Mischung	A.	Mischung	B.
5	1	8	5	8	3
3	x	96	x′	96	x″
$x = \frac{3}{5}$ Mark		x′ = 60 Mark		x″ = 36 Mark.	

5) Man muß von jeder Sorte 120 Ohm nehmen.

6)

A 1 Ztnr. zu $18\frac{1}{2}$ fl. = $\frac{370}{20}$ fl.	(−) $\frac{61}{20}$ fl.	1 Ztnr.	4 Ztnr.
B 1 = = $3\frac{1}{4}$ = = $\frac{65}{20}$ =	(+) $\frac{244}{20}$ =	$\frac{1}{4}$ =	1 =
1 Ztnr. zu $15\frac{9}{20}$ fl. = $\frac{309}{20}$ fl.			

Gewinn	B.
$\frac{244}{20}$	1
$\frac{61}{20}$	x
$x = \frac{1}{4}$ Ztnr.	

So oft also von A 1 Ztnr. genommen wird, muß von B $\frac{1}{4}$ Ztnr. genommen werden, oder von A 4 Ztnr. und von B 1 Ztnr.

7)

A 1 Pfd. zu 6 Kzr.	(−) $\frac{3}{5}$ Kzr.	1 Pfd.	7 Pfd.	14 Pfd.
B 1 = = 4 =	(+) $1\frac{2}{5}$ =	$\frac{3}{7}$ =	3 =	6 =
20 Pfd. zu $5\frac{2}{5}$ Kzr., d. h. 1 Pfd. zu $5\frac{2}{5}$ Kzr.			10 Pfd.	20 Pfd.

Gewinn Pfd.	B.	Mischung A.
$1\frac{2}{5}$	1	10 Pfd., 7 Pfd.
$\frac{3}{5}$	x	20 = , x′ =
$x = \frac{3}{7}$ Pfd.		x′ = 14 Pfd.

Also werden von A. 14 Pfd. und von B. 20 Pfd. — 14 Pfd. = 6 Pfd. zur Mischung genommen.

8) Vom 13löthigen müssen $9\frac{3}{5}$ Mark, vom 8löthigen $2\frac{2}{5}$ Mark genommen werden.

c.

Vorbemerkung. Wenn mehr als 2 Dinge von verschiedenem Werthe so gemischt werden sollen, daß die Mischung einen bestimmten mittleren Werth erhalte; so kann die Mischung auf verschiedene Weise vollzogen werden, und es sind daher auch verschiedene Antworten möglich, die dennoch alle richtig sind. Man nennt daher solche Aufgaben unbestimmt.

1) Auflös. a. Gibt man 1 Maß A. um 16 Kzr., so verliert man 4 Kzr.; gibt man 1 Maß C. um 16 Kzr., so gewinnt man 5 Kzr. Gewinnt man 5 Kzr. an 1 Maß C., so gewinnt man 4 Kzr. an $\frac{4}{5}$ Maß C. So oft man also von A. 1 Maß nimmt, muß man von C. $\frac{4}{5}$ Maß nehmen, oder zu 5 Maß A. gehören immer 4 Maß C.

Gibt man nun auch 1 Maß B. für 16 Kzr., so verliert man

3 Kzr.; so oft also 1 Maß B. zur Mischung kommt, muß wieder von C. so viel dazu genommen werden, daß Nichts verloren wird. Man gewinnt 5 Kzr. an 1 Maß C., also 3 Kzr. an $\frac{3}{5}$ Maß; folglich müssen immer zu 1 Maß B. $\frac{3}{5}$ Maß C. genommen werden. Also so oft man 1 Maß A. nimmt, muß man 1 Maß B., und $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ Maß C. nehmen, oder zu $\frac{5}{5}$ Maß A. gehören $\frac{5}{5}$ Maß B. und $\frac{7}{5}$ Maß C., also zu 5 Maß A., 5 Maß B. und 7 Maß C. Beträgt demnach die Mischung 17 Maß, so hat man 5 Maß A., 5 Maß B. und 7 Maß C.; beträgt die Mischung 20×17 Maß $= 340$ Maß, so hat man von A. $20 \times 5 = 100$ Maß, von B. $20 \times 5 = 100$ Maß und von C. $20 \times 7 = 140$ Maß.

In dieser Aufgabe ist der Werth einer Einheit von jeder der 3 zu mischenden Sorten, die Größe der Mischung und der Mittelwerth gegeben; gesucht soll werden, wie viel von jeder der zu mischenden Sorten zu nehmen ist. — Die Werthe der 2 ersten Sorten übertreffen den Mittelwerth; der Werth der dritten Sorte bleibt unter demselben. Ich habe zuerst untersucht, wie viel von der dritten Sorte zu 1 Einheit der ersten Sorte, und dann, wie viel von der dritten Sorte zu 1 Einheit der zweiten Sorte genommen werden muß, damit weder gewonnen, noch verloren, sondern nur gemischt werde, und hierauf die zusammengehörigen Mengen addiert. Aus dem Verhältnisse dieser Summe zu den von jeder Sorte genommenen Einheiten habe ich sodann geschlossen, wie viel von jeder Sorte zur verlangten Mischung zu nehmen ist.

Probe:	100 Maß	zu 20 Kzr.	= 33 fl.	20 Kzr.
	100 „	zu 19 „	= 31 „	40 „
	140 „	zu 11 „	= 25 „	40 „
	340 Maß		= 90 fl.	40 Kzr., also

kostet 1 Maß 16 Kzr.

Auflös. b. Gibt man 1 Maß A. um 16 Kzr., so verliert man 4 Kzr., gibt man 1 Maß B. um 16 Kzr., so verliert man 3 Kzr.; also verliert man im Ganzen an A. und B. 7 Kzr., welche an C. wieder gewonnen werden müssen. Gibt man 1 Maß C. um 16 Kzr., so gewinnt man 5 Kzr.; gewinnt man 5 Kzr. an 1 Maß C., so gewinnt man 7 Kzr. an $\frac{7}{5}$ Maß C. Also gehören zu 1 Maß A. und 1 Maß B., $\frac{7}{5}$ Maß C. u. s. w.

Auflös. c. Gibt man von A. 1 Maß für 16 Kzr. und von C. 1 Maß für 16 Kzr., so hat man 1 Kzr. mehr gewonnen, als

verloren; will man nun nichts gewinnen und auch nichts verlieren, so muß man von B. so viel geben, daß dieser Kreuzer dabei verloren wird. Gibt man 1 Maß B. um 16 Kzr., so verliert man 3 Kzr., also verliert man 1 Kzr. an $\frac{1}{3}$ Maß B. Mithin gehören zu 1 Maß A., $\frac{1}{3}$ Maß B. und 1 Maß C., oder zu 3 Maß A., 1 Maß B. und 3 Maß C.

Zu 7 Maß Mischung gehören 3 Maß A., 1 Maß B. u. 3 Maß C.
= 340 = = = $145\frac{5}{7}$ = A., $48\frac{4}{7}$ = B. = $145\frac{5}{7}$ = C.

2)	A. 1 Maß zu 28 Kzr.	(—) 4 Kzr.
	B. 1 = zu 21 =	(+) 3 =
	C. 1 = zu 14 =	(+) 10 =
	490 Maß zu 24 Kzr.	

Verliert man 4 Kzr. an 1 Maß A., so verliert man 13 Kzr. an $\frac{13}{4}$ Maß A. Es gehören also zu 1 Maß B. und 1 Maß C., $\frac{13}{4}$ Maß A.; oder zu 13 Maß A. 4 Maß B. und 4 Maß C.

Ist die Mischung = 21 Maß, so hat man 13 Maß A., 4 Maß B. und 4 Maß C.; beträgt die Mischung 490 Maß, so hat man $303\frac{1}{3}$ Maß A., $93\frac{1}{3}$ Maß B. und $93\frac{1}{3}$ Maß C.

3)	A. = 15 Loth.	(—) 2 Loth	$\frac{7}{2}$ Mark	7 Mark	$12\frac{8}{11}$ Mark.
	B. = 11 =	(+) 2 =	1 =	2 =	$3\frac{7}{11}$ =
	C. = 8 =	(+) 5 =	1 =	2 =	$3\frac{7}{11}$ =
	20 Mark zu 13 Loth.			11 Mark.	20 Mark.

Verlust A.		Mischung A.		Mischung B.	
2 Lth., 1 Mk.		11	7	11	2
7 =, x =		20	x′	20	x″
x = $\frac{7}{2}$ Mark.		x′ = $12\frac{8}{11}$ Mk.		x″ = $3\frac{7}{11}$ Mk.	

4) Von jeder Sorte werden 36 Pfd. zur Mischung genommen.

5)	A. 1 Ohm zu 30 fl.	(—) 10 fl.	(—) 14 fl.	1 Ohm	5 Ohm.
	B. 1 = zu 24 =	(—) 4 =		1 =	5 =
	C. 1 = zu 18 =	(+) 2 =	(+) 7 fl.	2 =	10 =
	D. 1 = zu 15 =	(+) 5 =		2 =	10 =
	30 Ohm zu 20 fl.				30 Ohm.

6)	A. 1 Mark zu 16 Loth	(—) 5 Lth.		1 Mark	$1\frac{5}{7}$ Mrk.
	B. 1 = zu 13 =	(—) 2 =	(—) 8 Lth.	1 =	$1\frac{5}{7}$ =
	C. 1 = zu 12 =	(—) 1 =		1 =	$1\frac{5}{7}$ =
	D. 1 = zu 10 =	(+) 1 =	(+) 4 Lth.	2 =	$3\frac{3}{7}$ =
	E. 1 = zu 8 =	(+) 3 =		2 =	$3\frac{3}{7}$ =
	12 Mark zu 11 Loth.			7 Mark.	12 Mrk.

Wenn man von jeder Sorte 1 Mark nimmt, so gewinnt man 4 Loth und verliert 8 Loth Silber. Da man nun 4 Loth gewinnt, wenn man 1 Mark von D. und 1 Mark von E. nimmt; so muß man, um 8 Loth zu gewinnen, 2 Mark von D. und 2 Mark von E. nehmen. Ist die Mischung = 7 Mark, so nimmt man 1 Mark A., 1 Mark B., 1 Mark C., 2 Mark D. und 2 Mark E.; soll also die Mischung 12 Mark betragen, so muß man $1\frac{5}{7}$ Mark A., $1\frac{5}{7}$ Mark B., $1\frac{5}{7}$ Mark C., $3\frac{3}{7}$ Mark D. und $3\frac{3}{7}$ Mark E. nehmen.

d.

1) Man muß 6 Mark 8löthiges Silber zu $1\frac{1}{2}$ Mark 13löthigem nehmen, um $7\frac{1}{2}$ Mark 9löthiges zu erhalten.

2) Karat fl. Also kostet 1 Mark 18karatiges Gold = 285 fl.;
24 380 folglich $17\frac{7}{8}$ Mk. = $17\frac{7}{8} \times 285$ fl. = $5094\frac{3}{8}$ fl.
18 x

x = 285 fl.

3) $2\frac{1}{2}$ Mark zu 18 Karat enthalten = 45 Karat Gold,
$1\frac{1}{2}$ 〃 zu 22 〃 〃 = 33 〃 〃.

4 Mark Mischung enthalten 78 Karat Gold,
also enthält 1 Mark Mischung $19\frac{1}{2}$ 〃 〃.

4) 18 Pfd. 5pfündiges Zinn enthalten $14\frac{2}{5}$ Pfd. Zinn u. $3\frac{3}{5}$ Pfd. Blei,
34 〃 6 〃 〃 〃 20 〃 〃 〃 4 〃 〃,
20 〃 7 〃 〃 〃 $17\frac{1}{7}$ 〃 〃 〃 $2\frac{6}{7}$ 〃 〃.

62 Pfd. Mischung enthalten $51\frac{19}{35}$ Pfd. Zinn u. $10\frac{16}{35}$ Pfd. Bl.
$51\frac{19}{35} \times 30$ Kzr. = $1546\frac{2}{7}$ Kzr.
$10\frac{16}{35} \times 5$ 〃 = $52\frac{2}{7}$ 〃

62 Pfd. Mischung = $1598\frac{4}{7}$ Kzr.
1 〃 〃 = $25\frac{170}{217}$ 〃

5) Da der Werth eines Pfundes der bessern Sorte um 8 Kzr. größer ist, als der Mittelwerth; so kosten 120 Pfd. der bessern Sorte 960 Kzr. mehr, als 120 Pfd. der Mischung kosten. Die 320 Pfd. der geringern Sorte müssen demnach 960 Kzr. weniger kosten, als 320 Pfd. nach dem Mittelwerthe kosten. 1 Pfd. der geringern Sorte muß also den 320sten Theil von 960 Kzr. d. i. 3 Kzr. weniger kosten, als 20 Kzr.; mithin kostet 1 Pfd. der geringern Sorte 17 Kzr.

6) Kosten 280 Maß = 74 fl. 40 Kzr., so kostet 1 Maß = 16 Kzr.

A. 1 Maß zu 20 Kzr.	(—) 4 Kzr.	1 Maß	2 Maß	80 Maß.
B. 1 " zu 18 "	(—) 2 "	1 "	2 "	80 "
C. 1 " zu 12 "	(+) 4 "	$1\frac{1}{2}$ "	3 "	120 "
280 Maß zu 16 Kzr.			7 Maß	280 Maß.

e.

1) In den Aufgaben a. 1, 2, 3, 4, 5, 8, d. 3, 4 sind Dinge von verschiedenem Werthe gegeben, und man soll den Mittelwerth oder den Durchschnitt suchen. Man nennt eine solche Rechnung die Berechnung des Mittelwerthes oder des Durchschnitts.

2) In den Aufgaben b. 1, 3, 4, 5, 7, 8, c. 1, 2, 3, 4, 5, 6, d. 1, 6 ist gefragt, wie viel man von jeder der zu mischenden Waaren zu nehmen habe, damit eine gegebene Menge entstehe und jede Einheit der Mischung den verlangten Mittelwerth habe. — In der Aufgabe b. 6 ist die Menge, welche durch die Mischung entstehen soll, gar nicht angegeben; man soll also entweder nur überhaupt 2 Mengen (etwa in den kleinsten ganzen Zahlen) bestimmen, durch deren Mischung der verlangte Mittelwerth entsteht, oder man soll angeben, wie viel von jeder Sorte zu Einer Einheit der Mischung zu nehmen ist.

3) In der Aufgabe d. 5 sind die Mengen der beiden zu mischenden Sorten nebst dem Mittelwerthe gegeben, und man soll den Werth 1 Einheit der geringern Sorte bestimmen.

4) Bei allen in diesem §. vorkommenden Rechnungen ist weder von Gewinn noch von Verlust, sondern nur von Mischung die Rede.

5) Bei den unter c. gegebenen Aufgaben sind verschiedene Antworten möglich, die dennoch alle richtig sind. Man kann bei diesen Aufgaben jede Sorte, die besser ist, als der Mittelwerth, mit irgend einer geringeren mischen, wobei man nur Sorge zu tragen hat, daß keine Sorte ganz aus der Rechnung bleibe. Oder man kann auch jede bessere Sorte mit jeder geringern, als die Mittelsorte, mischen. Oder man nehme von jeder der bessern Sorten eine beliebige Menge von Einheiten und suche, um wie viel die Werthe dieser Einheiten, von dem Werthe eben so vieler Einheiten, von denen aber jede den Mittelwerth hat, abweichen. Ist nun nur 1 Sorte gegeben, deren Werth geringer, als der Mittelwerth; so suche man den Unterschied zwischen 1 Einheit

dieser Sorte und dem Mittelwerthe und berechne, wie viel von der geringern Sorte zu nehmen ist, damit der sich dadurch herausstellende Gewinn dem vorigen Verluste gleichkomme. — Sind mehrere Sorten gegeben, die im Werthe geringer, als der Mittelwerth; so nehme man von diesen Sorten, eine ausgenommen, ebenfalls beliebige Mengen, jedoch so, daß die Abweichung ihres Gesammtwerthes vom Mittelpreise kleiner ist, als diese Abweichung bei den Sorten war, die im Werthe höher stehen, als der Mittelwerth. Nun suche man den Unterschied dieser 2 Abweichungen und berechne, wie viel von der noch nicht gemischten Sorte zu nehmen ist, damit im Ganzen weder gewonnen noch verloren, sondern nur gemischt werde.

Da nun solche Aufgaben auf sehr verschiedene Weise gelöst werden können, und da es die Richtigkeit der Rechnung durchaus nicht stört, wenn man bei einer Mischung ein Paar zusammengehörige Zahlen durch irgend eine Zahl multiplIziert oder theilt, die übrigen aber unverändert läßt; so ist leicht einzusehen, warum man diese Aufgaben unbestimmt nennt. (Siehe meinen „Arithmetischen Unterricht in Gymnasien und höhern Bürgerschulen". §. 42 und 43.)

§. 31.

Zweisatzregel; Kettenregel; Aufgaben, in denen der Fragesatz durch eine Reihe anderer Sätze bedingt ist.

A. Zweisatzregel.

Die Zweisatzform ist diejenige Ansatzform, die sich zunächst und unmittelbar aus der Aufgabe ergibt, und welche von dem Schüler, der die 4 Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen versteht, am leichtesten begriffen wird. Daher wurden bisher alle Aufgaben in dieser Form berechnet.

Ehe nun die Schüler mit dem Kettensatze bekannt gemacht werden, soll die Regel für die Zweisatzrechnungen aufgestellt werden, und es wird sich dann auch zeigen, daß der Schüler, der auf die bisher angegebene Weise unterrichtet worden, im Stande ist, die Aufgaben auch in jeder andern Form zu rechnen.

I. Regeln für die zweigliedrigen Zweisatzrechnungen.

1) In der Aufgabe: 2 ℔ kosten 7 fl.; wie viele fl. kosten 5 ℔?

ist der Satz: „2 ℔ kosten 7 fl.“ der bekannte Satz, und es besteht dieser aus 2 Zahlgliedern: 2 ℔ und 7 fl. Wenn man diese beiden Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder theilt; so erhält man 2 Zahlglieder, welche in demselben Verhältnisse der Werthgleichheit stehen, wie die ursprünglichen. Das zweite Glied wächst mithin oder nimmt ab, in demselben Verhältnisse, in welchem das erste Glied wächst oder abnimmt.

Würde 1 ℔ 7 fl. kosten; so würden 5 ℔ 5 mal 7 fl. kosten. Wäre also das erste Glied des bekannten Satzes 1; so ließe sich leicht auf das gleichnamige Glied des Fragesatzes übergehen, und man erhielte das Frageglied, indem man das zweite Glied des bekannten Satzes so vielmal nähme, als das erste Glied des Fragesatzes Einheiten enthält. Man verwandelt nun das erste Glied des bekannten Satzes in 1, wenn man dasselbe durch es selbst dividiert (§. 23 a., 13 — 15). Wird aber auf diese Weise das erste Glied des bekannten Satzes in 1 verwandelt; so muß auch das zweite Glied des bekannten Satzes durch dieselbe Zahl getheilt werden, damit das Verhältniß der Werthgleichheit nicht gestört wird.

Man findet daher in geordneten zweigliedrigen Zweisatzrechnungen, in denen das zweite Glied des bekannten Satzes in gleichem Verhältnisse zu- oder abnimmt, wie das erste Glied zu- oder abnimmt, das Frageglied, wenn man das zweite Glied des bekannten Satzes mit dem ersten Gliede des Fragesatzes vervielfacht und dieses Produkt durch das erste Glied des bekannten Satzes theilt.

Z. B. ℔ fl.

$$2 = 7$$

$$5 = x$$

$$x = \frac{5 \times 7 \text{ fl.}}{2}$$

Anm. Daß man nicht mit 5 Pfd. vervielfacht, sondern mit 5, versteht sich wol von selbst. Siehe hierüber §. 12, I. c.

Ellen fl.

$$7\tfrac{1}{2} = 15\tfrac{4}{5}$$

$$9\tfrac{3}{8} = x$$

$$x = \frac{9\tfrac{3}{8} \times 15\tfrac{4}{5}}{7\tfrac{1}{2}} = \frac{\tfrac{75}{8} \times \tfrac{79}{5}}{\tfrac{15}{1}}$$

$$= \tfrac{2}{15} \times \tfrac{75}{8} \times \tfrac{79}{5} = \frac{2 \times 75 \times 79}{15 \times 8 \times 5} = \tfrac{79}{4}$$

$= 19\tfrac{3}{4}$ fl.

In einer Proportion findet man das vierte Glied, wenn man das Produkt der beiden mittlern Glieder durch das erste Glied dividiert (siehe meinen Arithmetischen Unterricht, §. 11). Will man nun die vorstehende Aufgabe in der Proportionsform lösen; so müssen das zweite Glied des bekannten Satzes und das erste Glied des Fragesatzes die beiden mittlern Glieder und das erste Glied des bekannten Satzes das erste Glied der Proportion bilden.

$7\frac{1}{2}$ Ellen verhalten sich zu $9\frac{3}{8}$ Ellen, wie $15\frac{4}{5}$ fl. zu x fl. oder $7\frac{1}{2}$ Ellen : $9\frac{3}{8}$ Ellen = $15\frac{4}{5}$ fl. : x fl.

Man hat also die Zahlenproportion:

$$7\tfrac{1}{2} : 9\tfrac{3}{8} = 15\tfrac{4}{5} : x$$

und $$x = \frac{9\frac{3}{8} \times 15\frac{4}{5}}{7\frac{1}{2}}.$$

Schreibt man diese Aufgabe in der Form einer Theilung an, so setzt man das zweite Glied des bekannten und das erste Glied des Fragesatzes auf die rechte Seite, das erste Glied des bekannten Satzes aber auf die linke Seite des Theilungsstriches und stellt das Frageglied voran auf die linke Seite des Theilungsstriches.

fl. ?	$9\frac{3}{8}$ Ellen
Ellen $7\frac{1}{2}$	$15\frac{4}{5}$ fl.
	$x = \frac{9\frac{3}{8} \times 15\frac{4}{5} \text{ fl.}}{7\frac{1}{2}}$

Gelesen wird bei dem Ansetzen der Glieder in dieser Form: Wie viele fl. kosten $9\frac{3}{8}$ Ellen, wenn $7\frac{1}{2}$ Ellen $15\frac{4}{5}$ fl. kosten?

Man nennt diese Ansatzform gewöhnlich die Reesische, nach ihrem Erfinder K. F. de Rees, einem Holländer.

Anm. Das Wort Regel de tri ist eine Abkürzung des Ausdruckes regula de tribus terminis oder numeris und bezeichnet, daß in einer solchen Aufgabe 3 Zahlen vorkommen.

2) Wird in der Aufgabe: Wenn 3 Arbeiter 10 Tage zu einem Geschäfte brauchen; wie viele Tage brauchen demnach 4 Arbeiter dazu? das erste Glied des bekannten Satzes dreimal so klein, so wird das zweite Glied desselben Satzes dreimal so

groß; denn 1 Arbeiter braucht zu demselben Geschäfte 3 × 10 Tage. Würde das erste Glied zweimal so groß, so würde das zweite Glied zweimal so klein. Das zweite Glied des bekannten Satzes nimmt also in demselben Maße zu, wie das erste abnimmt, und in demselben Grade ab, wie das erste zunimmt. Die zwei Glieder des bekannten Satzes wachsen und fallen mithin nicht in demselben, sondern im entgegengesetzten Verhältnisse.

Wäre das erste Glied des bekannten Satzes 1, so erhielte man das Frageglied, wenn man das zweite Glied des bekannten Satzes durch die Zahl theilte, welche angibt, wie viele Einheiten das erste Glied des Fragesatzes enthält. Man verwandelt das erste Glied des bekannten Satzes in 1, wenn man dasselbe durch es selbst dividiert. Da aber die Glieder des bekannten Satzes im entgegengesetzten Verhältnisse wachsen und abnehmen; so muß man das zweite Glied des bekannten Satzes mit der Zahl vervielfachen, welche angibt, wie viele Einheiten das erste Glied desselben Satzes enthält.

Man findet daher in geordneten zweigliedrigen Zweisatzrechnungen, in denen das zweite Glied des bekannten Satzes im entgegengesetzten Verhältnisse wächst oder abnimmt, wie das erste Glied wächst oder abnimmt, das Frageglied, wenn man das Produkt aus den zwei ersten Gliedern des bekannten Satzes durch das erste Glied des Fragesatzes theilt.

Z. B.	Arb.	Tage
	3	10
	4	x

$$x = \frac{3 \times 10}{4} = 7\tfrac{1}{2} \text{ Tage.}$$

Will man diese Aufgabe in der Proportionsform berechnen; so mache man die beiden Glieder des bekannten Satzes zu den 2 mittlern und das bekannte Glied des Fragesatzes zu dem ersten Gliede der Proportion.

Setzt man an:

Arb. Arb. Tage Tage

$$3 : 4 = 10 : x$$

so wird alsdann geurtheilt:

Doppelt so viele Arbeiter brauchen zu demselben Geschäfte

nur halb so viel Arbeitstage; also ist das erste Glied nicht der Theiler, sondern sein gleichnamiges. Man erhält alsdann:

$$4 : 3 = 10 : x$$

woraus $x = \frac{3.10}{4} = 7\frac{1}{2}$.

Um diese Aufgabe in der Reesischen Ansatzform zu berechnen, bringe man die 2 zu multiplizierenden Glieder auf die linke, und das bekannte Glied des Fragesatzes auf die rechte Seite des Theilungsstriches.

Anm. Man sagt gewöhnlich, die Glieder stehen in geradem Verhältnisse, wenn sie in gleichem Verhältnisse zu- oder abnehmen, und in umgekehrtem Verhältnisse, wenn dies nicht der Fall ist. In geradem Verhältnisse stehen: Waaren und ihre Preise, Kapitalien und Zinsen, die Anzahl der Arbeiter und die Menge der Arbeit bei gleicher Arbeitszeit, Zeit und Lohn der Arbeiter, die Menge der Arbeit und der Lohn dafür, die Anzahl der Menschen und die Lebensmittel, welche sie in der nämlichen Zeit nöthig haben, der Getreidepreis und der Brodpreis, die Länge des Weges und die zum Durchlaufen desselben zu verwendende Zeit bei gleicher Geschwindigkeit u. s. w. In umgekehrtem Verhältnisse stehen: Die Menge der Arbeiter und die zu der nämlichen Arbeit erforderliche Zeit, die Menge der Menschen und die Zeit, in welcher sie eine bestimmte Menge Nahrungsmittel verzehren, der Preis des Getreides und das Gewicht des Brodes für das nämliche Geld, die Menge der Waare, welche man für ein bestimmtes Geld kauft, und der Preis derselben, die Kapitalien und die Zeit, in welcher jene ausstehen, um gleichgroße Zinsen einzutragen u. s. w.

II. Regeln für die mehrgliedrigen Zweisatzrechnungen.

1) In der Aufgabe: 4 Personen verdienen in 3 Tagen 15 fl.; wie viel fl. verdienen demnach 7 Personen in 5 Tagen? — besteht der bekannte Satz aus den 3 Zahlgliedern: 4 Personen, 3 Tage und 15 fl. Ist der Ansatz geordnet; so bildet das Glied, nach dessen gleichnamigem gefragt ist, das letzte Glied des bekannten Satzes, und die Glieder müssen in beiden Sätzen in derselben Ordnung auf einander folgen. Nennen wir nun 4 Personen das erste, 3 Tage das zweite und 15 fl. das dritte Glied; so finden wir, daß das dritte Glied mit dem ersten und dem zweiten Gliede in gleichem Verhältnisse wächst und abnimmt. Würde 1 Person in 1 Tage 15 fl. verdienen; so würden 7 Personen in 5 Tagen $7 \times 5 \times 15$ fl. verdienen. Wären also die 2 ersten Glieder des bekannten Satzes 1, so ließe

sich leicht auf die 2 bekannten Glieder des Fragesatzes übergehen. Man erhielte das Frageglied, indem man das dritte Glied des bekannten Satzes so vielmal nähme, als die 2 bekannten Glieder des Fragesatzes Einheiten enthalten. Dividiert man nun jedes der 2 ersten Glieder des bekannten Satzes durch es selbst, um diese Glieder in 1 zu verwandeln; so muß man auch das dritte Glied durch diese beiden Zahlen dividieren.

Man findet daher in geordneten dreigliedrigen Zweisatzrechnungen, in denen das Glied, dessen gleichnamiges das Frageglied ist, in gleichem Verhältnisse mit den 2 ersten Gliedern des bekannten Satzes zu- oder abnimmt, das Frageglied, wenn man das letzte Glied des bekannten Satzes mit den 2 gegebenen Gliedern des Fragesatzes multipliziert und durch die 2 ersten Glieder des bekannten Satzes dividiert.

Aus denselben Gründen wird man auch in geordneten 4- und mehrgliedrigen Zweisatzrechnungen, in denen das Glied, dessen gleichnamiges das Frageglied ist, in gleichem Verhältnisse mit den übrigen Gliedern des bekannten Satzes zu- oder abnimmt, das Frageglied finden, wenn man das letzte Glied des bekannten Satzes mit den angegebenen Gliedern des Fragesatzes vervielfacht und dieses Produkt durch die übrigen Glieder des bekannten Satzes theilt.

Es sei die Aufgabe im „Rechenunterricht" §. 26, A., b. 12 zu berechnen.

Fr.	Tge.	Stdn.	Ellen.
5	24	9	$72\frac{1}{2}$
9	18	8	x

$$x = \frac{72\frac{1}{2} \times 9 \times 18 \times 8}{5 \times 24 \times 9} = 87.$$

Anm. Zur Erleichterung der Uebersicht kann man die Glieder, mit denen das letzte Glied des bekannten Satzes zu vervielfachen ist, mit diesem durch Striche verbinden.

2) In der Aufgabe: 20 Arbeiter bringen ein gewisses Geschäft in 16 Tagen zu Stande, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; wie lange würden demnach 32 Arbeiter mit demselben Geschäfte zu thun haben, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiteten? — besteht der bekannte Satz aus den 3 Zahlgliedern: 20 Arbeiter, 8 Stunden und 16 Tage, und das letzte Glied steht zu den beiden

übrigen Gliedern im umgekehrten oder entgegengesetzten Verhältnisse. Würde das erste Glied 20 Mal so klein gemacht, so müßte das letzte Glied 20 Mal so groß werden; würde das zweite Glied 8 Mal so klein, so müßte das letzte Glied 8 Mal so groß werden, als es ist. Dividiert man daher das erste Glied durch 20 und das zweite Glied durch 8; so muß das letzte Glied mit diesen beiden Zahlen multipliziert werden, wenn das in der Aufgabe bestimmte Verhältniß nicht aufgehoben werden soll. Hat man nun die beiden ersten Glieder des bekannten Satzes auf diese Weise in 1 verwandelt, und man will von diesen auf die 2 gegebenen Glieder des Fragesatzes, also auf das 32fache und 10fache übergehen; so muß das vorhin gefundene Produkt aus den Gliedern des bekannten Satzes durch die bekannten Glieder des Fragesatzes dividiert werden, um das gewünschte Resultat zu erhalten.

Arb.	Stdn.	Tag.
20	8	16
32	10	x

$$x = \frac{20 \times 8 \times 16}{32 \times 10} = 8.$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß man auch in 4- und mehrgliedrigen Zweisatzrechnungen, in denen das Glied, dessen gleichnamiges das Frageglied ist, in entgegengesetztem Verhältnisse mit den übrigen Gliedern des bekannten Satzes zu- oder abnimmt, das Frageglied findet, wenn man das Produkt der Glieder des bekannten Satzes durch die gegebenen Glieder des Fragesatzes dividiert.

3) In der Aufgabe: In welcher Zeit erhält man von 475 fl. Kapital 66½ fl. Zins, wenn man 4 v. H. nimmt? — besteht der bekannte Satz aus den 3 Zahlgliedern: 100 fl. Kapital, 4 fl. Zins und 1 Jahr. Nennen wir nun 100 fl. Kapital das erste, 4 fl. Zins das zweite, und 1 Jahr das dritte oder letzte Glied; so finden wir, daß das dritte Glied mit dem ersten im entgegengesetzten und mit dem zweiten Gliede in gleichem Verhältnisse wächst und abnimmt. Es ergibt sich daher aus 1) und 2), daß man das Frageglied findet, wenn man das letzte Glied des bekannten Satzes mit dem ersten Glied des bekannten und dem zweiten Gliede des Fragesatzes vervielfacht und dieses Pro-

dukt durch das erste Glied des Fragesatzes und das zweite Glied des bekannten Satzes dividiert.

fl. Kap.	fl. Zins	Jahr.
100	4	1
475	$\frac{133}{2}$	x

$$x = \frac{1 \times 100 \times \frac{133}{2}}{475 \times 4} = \frac{100 \times 133}{475 \times 4 \times 2} = 3\tfrac{1}{2}.$$

Aus dem Bisherigen ergibt sich nun die allgemeine Regel:

XXVII. Man findet in jeder geordneten Zweisatzrechnung das Frageglied, wenn man das letzte Glied des bekannten Satzes mit denjenigen Gliedern im bekannten Satze, welche zu ihm im entgegengesetzten Verhältnisse stehen, multipliziert und durch die gleichnamigen im Fragesatze dividiert, sodann dieses Ergebniß durch die Glieder des bekannten Satzes, welche mit dem letzten Gliede dieses Satzes in gleichem Verhältnisse zu- oder abnehmen, dividiert und durch die gleichnamigen im Fragesatze multipliziert.

Es sei die Aufgabe im „Rechenunterrichte" §. 26, A. c. 8. zu berechnen:

Web.	Woch.	Tg.	Stdn.	Ell. l.	Ell. b.	Stück Tuch.
12	7	6	10	36	$1\frac{1}{4}$	80
18	6	5	12	40	$1\frac{1}{8}$	x

$$x = \frac{80 \times 18 \times 6 \times 5 \times 12 \times 36 \times 1\frac{1}{4}}{12 \times 7 \times 6 \times 10 \times 40 \times 1\frac{1}{8}} = 102\tfrac{6}{7} \text{ Stück.}$$

Anm. Aufgaben, in denen 5 Zahlglieder gegeben sind, wurden früher nach der Regel de quinque, solche, in denen 7 Zahlglieder gegeben sind, nach der Regel de septem berechnet u. s. w. Man mag nun eine Aufgabe in der Zweisatzform oder nach einer dieser Regeln berechnen; so erscheint der gesuchte Werth in Form eines Quotienten, so daß die einen Glieder im Zähler (Dividendus, beim Reesischen Satze oft das Multiplikationsfach genannt), die übrigen im Nenner (Divisor, beim Reesischen Satze das Divisionsfach genannt), erscheinen. Zur leichtern Vergleichung folgen noch einige Beispiele auf verschiedene Weise gelöst.

1) Wie viel Gulden Zins tragen 6000 fl. in 3 Jahren, wenn man $4\frac{1}{2}$ v. H. nimmt?

a)

fl. Kap.	Jahr.	fl. Zins
100	1	$^9/_2$
6000	3	x

$$x = \frac{9 \times 6000 \times 3}{2 \times 110 \times 1} = \frac{9 \times 60 \times 3}{2}$$

$= 810.$

b) $100 \,.\, 1 : 6000 \,.\, 3 = {}^9/_2 : x$

oder $100 \,.\, 1 \,.\, x = 6000 \,.\, 3\; 4^1/_2$

also $x = \frac{6000 \times 3 \times 4^1/_2}{100} = 810.$

c)

Zins fl. ?	6000 fl. Kap.
fl. Kap. 100	3 Jahren
Jahr 1	$4^1/_2$ fl. Zins.

$$x = \frac{6000 \times 3 \times 4^1/_2}{100 \times 1} = 810.$$

2) Drei Arbeiter bekommen in 4 Wochen für täglich 6 Stunden Arbeit 30 fl.; wie viel Stunden werden 10 Arbeiter 9 Wochen täglich arbeiten müssen, um mit 360 fl. eben so gut bezahlt zu sein?

a)

Arb.	fl.	Woch.	Stdn.
3	30	4	6
10	360	9	x

$$x = \frac{3 \times 360 \times 4 \times 6}{10 \times 30 \times 9} = 9^3/_5.$$

b) $30 : 360 = 3 \,.\, 4 \,.\, 6 : 10 \,.\, 9 \,.\, x$

oder $30 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, x = 360 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 6.$

also $x = \frac{360 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 6}{30 \,.\, 10 \,.\, 9} = 9^3/_5.$

c)

Stdn. ?	3 Arb.
Arb. 10	360 fl.
fl. 30.	4 Woch.
Woch. 9.	6 Stdn.

$$x = \frac{3 \times 360 \times 4 \times 6}{10 \times 30 \times 9} = 9^3/_5.$$

3) Jemand hatte von 12000 fl. zu 4 v. H. in $7^1/_2$ Jahren die Zinsen eingenommen. Er stellt nun ein neues Kapital von 15000 fl. aus und wünscht in 5 Jahren eben so viel Zins ziehen zu können; wie viel muß er v. H. nehmen?

a)

fl. Kap.	Jahr.	fl. Zins.
12000	$^{15}/_2$	4
15000	5	x

$$x = \frac{12000 \times {}^{15}/_2 \times 4}{15000 \times 5} = \frac{12 \times 15 \times 4}{15 \times 5 \times 2} = 4^4/_5.$$

b) $15000 \,.\, 5 : 12000 \,.\, {}^{15}/_2 = 4 : x$

$$x = \frac{12000 \,.\, {}^{15}/_2 \,.\, 4}{15000 \,.\, 5} = 4^4/_5.$$

c) Zins fl. ?	12000 fl. Kap.
Kap. fl. 15000	$^{15}/_2$ Jahr.
Jahr 5	4 fl. Zins

$$x = \frac{12000 \times {}^{15}/_2 \times 4}{15000 \times 5} = 4^4/_5.$$

B. Die Kettenregel.

Ehe ich zur Aufstellung der Kettenregel übergehe, soll noch eine Aufgabe, in welcher der Fragesatz durch eine Reihe anderer Sätze bedingt ist, auf mehrfache Weise gerechnet werden. Ich wähle dazu die fünfte Aufgabe im §. 31 des „Rechenunterrichts".

a.

Mltr. Hafer	Mltr. Spelz
4	$\frac{7}{2}$
480	x

$$x = \frac{480 \times {}^7/_2}{4} = 240 \text{ Mltr. Spelz.}$$

b.

Mltr. Spelz	Mltr. Gerst
18	10
240	x′

$x' = {}^{700}/_3$ Mltr. Gerste.

c.

Mltr. Gerst	pr. Thlr.
3	12
$^{700}/_3$	x″

$x'' = {}^{2800}/_3$ pr. Thlr.

d.

pr. Thlr.	fl.
4	7
$^{2800}/_3$	x‴

$x''' = 1633\,^1/_3$ fl.

In dieser Aufgabe ist das Fragglied von 4 Sätzen abhängig. — Ich habe zuerst aus dem Werthverhältnisse des Hafers zum Spelz den Werth von 180 Mltr. Hafer in Spelz, alsdann aus dem Verhältnisse des Spelzes zur Gerste den in Mltrn. Spelz angegebenen Werth der 180 Mltr. Hafer in Gerste, hierauf aus dem Verhältnisse der Gerste zu den preußischen Thalern den vorhin gefundenen Werth in preußischen Thalern, und endlich aus dem Verhältnisse der preußischen Thaler zu den rheinischen Gulden den zuletzt gefundenen Werth in Gulden auszudrücken gesucht.

Diese und ähnliche Aufgaben lassen sich auch ohne Ansatz berechnen. Z. B.:

4 Mltr. Hafer $= \frac{7}{2}$ Mltr. Spelz, 1 Mltr. Hafer $= \frac{\frac{7}{2}}{4}$ Mltr. Spelz, 480 Mltr. Hafer $= \frac{480 \times \frac{7}{2}}{4}$ Mltr. Spelz; 18 Mltr. Spelz = 10 Mltr. Gerste, 1 Mltr. Spelz $= \frac{10}{18}$ Mltr. Gerste, $\frac{480 \times \frac{7}{2}}{4}$ Mltr.

Spelz $= \frac{480 \times \frac{7}{2} \times 10}{4 \times 18}$ Mltr. Gerste; 3 Mltr. Gerste = 12 pr. Thlr., 1 Mltr. Gerste = $\frac{12}{3}$ Thlr., $\frac{480 \times \frac{7}{2} \times 10}{4 \times 18}$ Mltr. Gerste $= \frac{480 \times \frac{7}{2} \times 10 \times 12}{4 \times 18 \times 3}$ Thlr., 4 Thlr. = 7 fl., 1 Thlr. = $\frac{7}{4}$ fl., $\frac{480 \times \frac{7}{2} \times 10 \times 12}{4 \times 18 \times 3}$ Thlr. $= \frac{480 \times \frac{7}{2} \times 10 \times 12 \times 7}{4 \times 18 \times 3 \times 4}$ fl.

Die Antwort ist in der Form eines Bruches ausgedrückt. Da nun jeder Bruch als eine Theilung angesehen werden kann, in welchem Falle der Nenner des Bruches als Theiler und der Zähler als Theilungszahl erscheint; so werden, wenn wir obigen Bruch in der Form einer Theilung darstellen wollen, die Faktoren des Nenners als Theiler und die Faktoren des Zählers als Theilungszahlen angeschrieben werden müssen. Man hat die Theilungsform, sobald man sich den wagerechten Strich, der den Nenner vom Zähler trennt, senkrecht denkt.

	480
4	$\frac{7}{2}$
18	10
3	12
4	7

Fügen wir die dazu gehörigen Benennungen bei, so haben wir den sogenannten Kettensatz, welcher Namen dieser Ansatzform deßwegen beigelegt wurde, weil bei ihr die einzelnen Glieder wie an einer Kette zusammenhängen.

fl. ?	480 M. Haf.
M. Haf. 4	$\frac{7}{2}$ M. Spelz
M. Spelz 18	10 M. Gerste
M. Gerste 3	12 Thlr.
Thlr. 4	7 fl.

Die Ausrechnung ist dieselbe, man mag die Bruchform oder die Theilungsform zur Ansatzfoam wählen; es muß also beim Kettensatze das Produkt aller Zahlen der rechten Seite durch das Produkt aller Zahlen der linken Seite getheilt werden.

Die Glieder der linken Seite eines Kettensatzes werden gewöhnlich nicht besonders benannt, weil sich die Benennung dieser Glieder aus

den Benennungen der Glieder, welche auf der rechten Seite stehen, leicht erkennen läßt.

Die rechte Seite wird gewöhnlich das Multiplikationsfach, die linke das Divisionsfach genannt.

Vergleichen wir obigen Kettensatz mit der Ausrechnung derselben Aufgabe durch Zweisatzrechnung; so finden wir, daß das zu berechnende Zahlenglied (480 Mltr. Hafer), welches in dem Zweisatze a. erstes Glied im Fragesatze ist, im Kettensatze die oberste Stelle im Multiplikationsfach einnimmt; links von diesem ist in der obersten Stelle des Divisionsfaches das Frageglied durch ein Fragezeichen (?) bezeichnet. Die Glieder des bekannten Satzes nehmen die zweite Stelle in den beiden Fächern ein und zwar so, daß das gleichnamige Glied des zu berechnenden Zahlengliedes als zweites Glied im Divisionsfache erscheint. Die 4 obersten Glieder des Kettensatzes bilden also die Glieder des Zweisatzes a. Der bedeutsame Unterschied besteht darin, daß im Zweisatze die Ausrechnung vollzogen und das Resultat 240 als erstes Glied des Fragesatzes in den Zweisatz b. eingetragen wurde, während dem im Kettensatze die betreffenden Glieder nur als Faktoren im Multiplikations- und Divisionsfache stehen. Die Glieder des bekannten Satzes in den Zweisätzen b., c. und d. bilden die dritten, vierten und fünften Gliederpaare im Kettensatze.

Man wird hieraus ersehen, daß der Unterschied zwischen beiden Auflösungsarten kein wesentlicher ist. Bei der Berechnung durch mehrere Zweisätze wird bei jedem Zweisatze das Resultat gesucht, während bei dem Kettensatze die Glieder, welche dieses Resultat bilden, in das betreffende Fach als Faktoren der Theilungszahl und des Theilers gesetzt werden und erst zuletzt das Resultat gesucht wird, welches dann das Endresultat ist. Da nun bei Aufgaben, in denen der Fragesatz durch eine Reihe anderer Sätze bedingt ist, die Bildung verschiedener Ansätze und die Bestimmung der Zwischenresultate zeitraubend ist; so werden solche Aufgaben am besten in der Kettensatzform berechnet. Der denkende Rechner wählt in jedem Falle die leichteste Rechnungsform. Wie aber bei der Zweisatzform immer die Ueberlegung vorhergehen muß, ob die Glieder in gleichem oder in entgegengesetztem Verhältnisse stehen, so muß dies auch beim Kettensatze stattfinden. Es sei z. B. die Aufgabe gegeben: Von wie viel Kapital erhält man 810 fl. in 3 Jahren zu $4\frac{1}{2}$ prc.?

Hat man nun den Ansatz gebildet,

?	810 fl. Zins
$\frac{27}{4}$	3 Jahre
$\frac{3}{2}$	100 fl. Kap.

so spreche man: Je mehr Zins, desto mehr Kapital, also ist das 2te Glied im Divisionsfach wirklicher Divisor. Ferner: Wenn man denselben Zins in der doppelten Zeit will, so braucht man nur die Hälfte des Kapitales auszustellen; also ist das dritte Glied im Divisionsfache nicht wirklicher Divisor, sondern das gleichnamige im Multiplikationsfache. Man erhält mithin

?	810 fl. Zins
$\frac{27}{4}$	$\frac{3}{2}$ Jahr.
3	100 fl. Kap.

Die Gründe hiefür ergeben sich leicht, sobald man die Aufgabe in der Zweisatzform berechnet.

Bei der Ausrechnung beachte man die Regeln XX. und XXIV.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich für die Bildung und Ausrechnung des Kettensatzes folgende Regel:

XXVIII. Soll eine Aufgabe in der Kettensatzform berechnet werden; so suche 1) aus der Aufgabe das zu berechnende Zahlenglied (oder: die zu berechnenden Zahlenglieder) heraus, stelle dasselbe (dieselben) rechts in die Reihe der Hinterglieder oder als erstes Glied (als erste Glieder) in das Multiplikationsfach, und links gegenüber ein Fragezeichen oder ein x, welches das Frageglied bezeichnet. 2) Richte die gemischten Zahlen ein, stelle die Vorder- und Hinterglieder so, daß ein Hinterglied und das in der nächstfolgenden Reihe stehende Vorderglied gleichnamig sind, und daß das letzte Glied im Multiplikationsfache mit dem Frageglied gleichnamig ist. 3) Stelle die Vorderglieder, welche mit ihren Hintergliedern im entgegengesetzten Verhältnisse stehen, in das Multiplikationsfach, und ihre gleichnamigen Glieder in das Divisionsfach. 4) Setze die Nenner der Brüche auf die entgegengesetzte Seite, und dividiere, nachdem möglichst abgekürzt worden ist, das Produkt der Zahlen im Multiplikationsfache durch das Produkt der Zahlen im Divisionsfache.

Anm. 1. Das älteste Buch, welches von der Kettenrechnung handelt, ist das von Adam Riesen, Rechenmeister zu Erfurt, gedruckt im Jahr 1525. Von Manchen wird die Kettenregel die Reesische Regel genannt, weil sie irriger Weise einen holländischen Kaufmann K. F. de Rees für den Erfinder derselben halten.

Anm. 2. Die Aufgaben im „Rechenunterrichte" lasse man zuerst durch mehrere Zweisätze und alsdann in der Kettensatzform berechnen.

C. Beantwortung der Aufgaben, in denen der Fragesatz durch eine Reihe anderer Sätze bedingt ist.

1) a.

x	1 Kzr.
60	1 fl.
$\frac{75}{2}$	1 Ballen
1	10 Rieß
1	20 Buch
1	24 Bogen

$x = 2\frac{2}{15}$ Bogen.

b.

x′	1 Kzr.
60	1 fl.
40	1 Ballen
1	10 Rieß
1	20 Buch
1	24 Bogen

x = 2 Bogen.

2) 1051200 fl. Kap. 3) $1735\frac{5}{12}$ fl.

4) 1 Karolin = 4 Kronenthaler.

10 Kronenth. = 27 fl., 1Kr. = $\frac{27}{10}$ fl., 4Kr. = $\frac{4\times 27}{10}$ fl.; $24\frac{1}{2}$ fl. = 14 pr. Th., 1 fl. = $\frac{28}{49}$ pr. Th., $\frac{4\times 27}{10}$ fl. = $\frac{4\times 27}{10} \times \frac{28}{49}$ pr. Th. = $\frac{4\times 27\times 28}{10\times 49}$ pr. Th. = $6\frac{6}{35}$ pr. Th.

Oder:

Th. pr. ?	1 Karolin
1	4 Kronenth.
10	27 fl.
$24\frac{1}{2}$	14 pr. Thlr.
	$6\frac{6}{35}$ pr. Thlr.

6)

x	180 M. Weizen
$\frac{23}{38}$	1 M. Korn
$\frac{21}{29}$	1 M. Gerste
$\frac{2}{3}$	1 M. Haf.
1	$\frac{7}{2}$ fl.

x = 1710 fl.

§. 32.

Zinseszinsrechnungen.

Wenn A. dem B. ein Kapital leihet, so ist B. verpflichtet, die bedungenen Zinsen am Ende des Jahres oder nach Ablauf des festgesetzten

Zeitraumes zu bezahlen. Geschieht dies nicht, und A. fordert nun von diesen nicht bezahlten Zinsen wieder Zins; so sagt man, er rechne Zins vom Zins oder Zins auf Zins oder Zinseszinsen oder zusammengesetzte Zinsen.

Anm. Ein Kapital ist also zu einfachen Zinsen ausgeliehen, wenn die gewöhnlichen Zinsen zu den gewöhnlichen Terminen bezahlt, oder die rückständigen Zinsen doch nicht selbst wieder verzinset werden; es ist auf Zinseszins ausgeliehen, wenn die an jedem festgesetzten Termin fälligen Zinsen nicht bezahlt, sondern sogleich wieder zu dem Kapital geschlagen und in dem nächsten Termin jedesmal sogleich verzinset werden.

Die Gesetze verbieten zwar Zins vom Zins zu nehmen; sie erlauben aber die Zinsen am Ende des Jahres einzusammeln und dieselben wieder als Kapital auszuleihen. Von Gegenständen, bei welchen das jährliche Einsammeln der Interessen unmöglich ist (z. B. von Wäldern, die jetzt feilgeboten und erst nach Jahren schlagbar werden), wird der wirkliche Werth durch Zinseszinsrechnung ausgemittelt.

1)

fl. Kap.	fl. Kap. u. Zins.	fl. Kap.	fl. Kap. u. Zins.
100	105	100	105
4000	x	4200	x′

$x = 4200$ fl. $\qquad x' = 4410$ fl.

Wenn 4000 fl. zu 5 v. H. ausgeliehen werden, so hat man also am Ende des ersten Jahres 4200 fl. Kapital sammt Zinsen, am Ende des zweiten Jahres 4410 fl. Kapital sammt Zinsen.

Bei dieser Auflösungsart müssen so viele Ansätze gebildet werden, als Jahre in der Aufgabe vorkommen, und sie ist daher nicht selten sehr weitläuftig; allein es ist leicht, solche Aufgaben ohne Ansatz zu berechnen.

100 fl. wachsen in 1 Jahre zu 105 fl. an, und statt 1 fl. hat man in dieser Zeit $^{105}/_{100}$ fl., also statt 4000 fl. am Ende eines Jahres $4000 \times {}^{105}/_{100}$ fl.

100 fl., welche am Anfange des zweiten Jahres ausgeliehen werden, wachsen bis zu Ende des zweiten Jahres zu 105 fl. an, also hat man wieder statt 1 fl., $^{105}/_{100}$ fl., und statt $4000 \times {}^{105}/_{100}$ fl., am Ende des zweiten Jahres $4000 \times {}^{105}/_{100} \times {}^{105}/_{100}$ fl.

Will man daher den Zins zu 5 v. H. am Ende eines Jahres mit dem am Anfange desselben Jahres ausgeliehenen Kapitale vereinigt erhalten, so darf man nur das Kapital mit $^{105}/_{100}$ vervielfachen. Daher die Regel:

XXIX. Um bei der Berechnung von Zinseszinsen den künftigen Werth zu erhalten, suche aus dem gegebenen Zinsfuße den künftigen Werth von 1 fl. in 1 Jahre, erhebe den auf diese Weise erhaltenen Quotienten in die so vielte Potenz, als Jahre da sind, und multipliziere mit dem baaren Werthe.

Potenz ist ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren.

Wird die Aufgabe nach der Kettenregel berechnet, so erhält man folgenden Ansatz:

?	4000 fl.
100	105 =
100	105 =
	4410 fl.

2) $3000 \times {}^{209}/_{200} \times {}^{209}/_{200} \times {}^{209}/_{200} = 3000. ({}^{209}/_{200})^3 = 3423\,{}^{3987}/_{8000}$ fl.

3) Wenn man am Ende des 3ten Jahres 105 fl. hätte, so würde das Kapital am Anfange desselben Jahres 100 fl. betragen haben; wenn man am Schlusse des 3ten Jahres 1852 fl. 12 Kzr. einzog, so betrug das Kapital am Anfange des 3ten Jahres 1764 fl.

Hätte man am Ende des zweiten Jahres 105 fl. an Kapita und Zins, so würde das Kapital am Anfange dieses Jahres 100 fl. betragen haben; beträgt das Kapital sammt Zins am Ende des zweiten Jahres 1764 fl., so war das Kapital am Anfange des zweiten Jahres = 1680 fl.

Wenn man am Ende des ersten Jahres 105 fl. hätte, so würde das Kapital am Anfange desselben Jahres 100 fl. betragen haben; zog man am Ende des ersten Jahres 1680 fl., so betrug das Kapital im Anfange 1600 fl.

Oder: Hätte man 100 fl. 3 Jahre lang gegen Zins auf Zins zu 5 v. H. ausgeliehen, so würde man nach 3 Jahren $100 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ fl. $= \frac{9261}{80}$ fl. an Kapital und Zins zurückerhalten. $1852\frac{1}{5}$ fl. $= \frac{9261}{5}$ fl.

Kap. sammt Zinsen.	Kap.
$\frac{9261}{80}$	100
$\frac{9261}{5}$	x

x = 1600 fl.

Oder: Das Kapital allein betrug $\frac{9261}{5} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} = 1600$ fl.

Daher die Regel:

XXX. Um bei der Berechnung von Zinseszinsen den baaren oder gegenwärtigen Werth zu erhalten, suche aus dem gegebenen Zinsfuße den baaren Werth von 1 fl. in 1 Jahre, erhebe den Quotienten in die so vielte Potenz, als Jahre gegeben sind, und multiplizière mit dem künftigen Werthe.

4) $1029 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} = 1029 \times (\frac{100}{105})^4 = 846\frac{106}{189}$ fl.

5) $60000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = 66150$ fl.; 66150 fl. — 66000 fl. = 150 fl.; also bietet A. 150 fl. mehr, als B. — Würde man den gegenwärtigen Werth von 66000 fl. berechnen; so müßte er natürlich kleiner sein, als 60000 fl. da der gegenwärtige Werth von 66150 fl. = 60000 fl. ist. Denn der baare Werth von 66000 fl. = $59863\frac{139}{147}$; der baare Werth von 150 fl. = $136\frac{8}{147}$ fl., $59863\frac{139}{147} + 136\frac{8}{147} = 60000$ fl.

6) $1500 \times \frac{100}{104}$ fl. $= 1442\frac{4}{13}$ fl.

$900 \times \frac{100}{104} \times \frac{100}{104} = 832\frac{17}{169}$ fl.

Also die Baarzahlung $= 2274\frac{69}{169}$ fl.

7) Bei lebenslänglichen Renten (Leibrenten) wird auf das Alter Dessen, welcher sie sich verschaffen will, in so fern Rücksicht genommen, als man hieraus mittelst der sogenannten Sterblichkeitstabellen bestimmen kann, wie viele Jahre für die übrige Lebenszeit des zur Erwerbung einer Leibrente sich Meldenden angenommen werden dürfen. Unter Sterblichkeits- oder Mortalitätstabellen versteht man die, durch Erfahrung und Berechnung mit Hülfe der Sterbregister gefertigten Tabellen, welche die den verschiedenen Altersstufen entsprechenden allgemeinen Verhältnißzahlen des Absterbens nachweisen. Mittelst der Sterblichkeitstabellen lassen sich wieder andere Tabellen berechnen, welche für jede nach Jahren angenommene Altersstufe die Durchschnittszahl der übrigen Lebensjahre angeben.

Für die 1000 fl., welche er am Ende des 1ten Jahres erhält, bezahlt er baar $1000 \times \frac{100}{105}$ fl. $= 952\frac{8}{21}$ fl.; für die 1000 fl., welche er am Ende des 2ten Jahres erhält, bezahlt er baar

$1000 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105}$ fl. $= 907\frac{13}{441}$ fl.; für die 1000 fl. welche er am Ende des 3ten Jahres erhält, bezahlt er baar $1000 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105}$ fl. $= 863\frac{7757}{9261}$ fl.; für die 1000 fl., welche er am Ende des 4ten Jahres erhält, bezahlt er baar $1000 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105}$ fl. $= 822\frac{136618}{194481}$ fl.; für die 1000 fl., welche er am Ende des 5ten Jahres erhält, bezahlt er baar $1000 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105}$ fl. $= 783\frac{2148917}{4084101}$ fl.; für 1000 fl. nach 6 Jahren bezahlt er baar $1000 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105}$ fl. $= 746\frac{18473734}{85766121}$ fl.; für 1000 fl. nach 7 Jahren bezahlt er gleich $1000 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105}$ fl. $= 710\frac{1227135890}{1801088541}$ fl.; für 1000 fl. nach 8 Jahren bezahlt er baar $1000 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} = 676\frac{31747071964}{37822859361}$ fl. Summe $= 6463\frac{8047169857}{37822859361}$ fl.

Anm. Unter **Annuität, Zeitrente** versteht man diejenige Rente, wodurch eine Schuld in einer gewissen Zeit von Jahren in bestimmten jährlichen Terminen und in gleichen Kapitalien nebst Zinsen abgetragen wird. Die **Leibrente** unterscheidet sich von der Annuität dadurch, daß sie aus Zinsen besteht, die man lebenslänglich für ein gewisses Kapital erhält, welches man dem Zahler desselben als Eigenthum abgetreten hat. Sie wird also nur bis zum Tode Desjenigen, der sie genießt, bezahlt.

§. 33.

Vermischte Aufgaben.

1)

fl. Abzug	fl. Schuldsumme
$5\frac{2}{3}$	100
$56\frac{2}{3}$	x

$x = 1000$ fl.

2) Kostet die Maß 12 Kzr., so bekommt man für eine gewisse Summe Geld 28 Ohm Wein; käme die Maß auf 1 Kzr. zu stehen, so bekäme man für dieselbe Summe Geld 28×12 Ohm; kommt die Maß auf 14 Kzr. zu stehen, so hat man für dieselbe Summe Geld $\frac{28 \times 12}{14} = 24$ Ohm; also sind 4 Ohm ausgelaufen.

3) Wenn ein gewisses Kapital zu 3 v. H. aussteht, so erhält man eine gewisse Summe Zins in 6 Jahren; würde dasselbe Kapital zu 5 v. H. ausstehen, so würde man eben so viel Zinsen in $3\frac{3}{5}$ Jahren erhalten.

4) Kostet das Hundert 1 fl. 48 Kzr., so bekommt man für eine ge-

wisse Summe Geld 500 Stück; kommt das Hundert auf 2 fl. 30 Kzr. zu stehen, so hat man für dieselbe Summe Geld 360 Stück.

5) Erhält man für 8 Monate 160 fl., so
= = = 5 = 100 fl., und
= 3 = 60 fl.

Also erhält A 100 fl. und B 60 fl.

6) 5 Arbeiter haben 4 Tage gearbeitet, also noch 32 Tage zu thun; 1 Arbeiter hätte also noch 5 × 32 Tage zu thun, und da nun 3 Arbeiter dazu kommen, so werden 8 Arbeiter in 20 Tagen fertig. Diese 8 Arbeiter arbeiten 8 Tage, haben also noch 12 Tage zu thun, als noch 4 Arbeiter dazu kommen. Haben 8 Arbeiter 12 Tage zu schaffen, so werden 12 Arbeiter in 8 Tagen fertig. Die Arbeit wird also in 4 + 8 + 8 = 20 Tagen fertig.

7) Will A 6 Batzen verdienen, so muß er 1 Tag arbeiten,
= A 8 = = , = = = $\frac{4}{3}$ = = .

7 Batzen verdient B in 1 Tage, also 8 Batzen in $\frac{8}{7}$ Tagen. C verdient 8 Batzen in 1 Tage.

Will jeder 8 Batzen verdienen, so muß A = $\frac{4}{3}$, B = $\frac{8}{7}$, C = 1 Tag, oder A = $\frac{28}{21}$, B = $\frac{24}{21}$, C $\frac{21}{21}$ Tag arbeiten.

Wenn sie $\frac{73}{21}$ Tage mit einander arbeiten; so hat A = $\frac{28}{21}$, B = $\frac{24}{21}$, C = 1 Tag gearbeitet; wenn sie 146 Tage mit einander arbeiten, so muß A = 56, B = 48, C = 42 Tage arbeiten.

Es ist in dieser Aufgabe die Anzahl der Arbeiter, der Tagelohn eines jeden, und die Gesammtzahl der Arbeitstage bekannt, so wie, daß ein Arbeiter so viel verdient habe, als der andere. — Ich habe zuerst berechnet, wie lange A und B arbeiten müssen, um eben so viel zu verdienen, als C in 1 Tage, sodann aus dem Verhältnisse der Summe dieser Tage zu den dabei befindlichen Tagen jedes Einzelnen berechnet, wie viel Tage einem Jeden von der Gesammtzahl der Arbeitstage zukommen.

8) Wenn S die Zinsen von 200 fl. am 1. April bezahlt; so werden die Zinsen von 600 fl. in 4 Monaten fällig. Werden nun am 1. April keine Zinsen bezahlt, so tragen 600 fl. + 200 fl. = 800 fl. Kapital in 3 Monaten so viel Zins, als vorher 600 fl. in 4 Monaten. Wenn man also die Zinsen von beiden Kapitalien am 1. Juli einnimmt; so empfängt man eben so viel, als wenn man die Zinsen von 200 fl. am 1. April und von 600 fl. am 1. August empfängt.

Vergleiche IV. Stufe, §. 26, C.

9) Der erste Wagen legt in 6 Stunden 5 Meilen, also in 1 Stunde

$\frac{5}{6}$ Meilen zurück; der zweite Wagen legt in 8 Stunden 6 Meilen, also in 1 Stunde $\frac{6}{8}$ Meilen zurück; also beide in 1 Stunde $\frac{5}{6} + \frac{6}{8}$ Meilen = $\frac{19}{12}$ Meilen.

Legen beide Wägen $\frac{19}{12}$ Meilen in 1 Stunde zurück, so legen sie $\frac{95}{2}$ Meilen in 30 Stunden zurück.

10) A kommt in 4 Stunden 3 Meilen weit, also in 1 Stunde $\frac{3}{4}$ Meilen. B kommt in 5 Stunden 4 Meilen weit, also in 1 Stunde $\frac{4}{5}$ Meilen. $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20}$. Machen beide $\frac{31}{20}$ Meilen in 1 Stunde; so legen sie $\frac{31}{2}$ Meilen in 10 Stunden zurück, und kommen also nachmittags 3 Uhr zusammen.

11)

A= 9 Batzen	$^{12}/_{9}$ Tage	$^{20}/_{15}$ Tage	20 Tage	40 Tage
B=10 „	$^{12}/_{10}$ „	$^{18}/_{15}$ „	18 „	36 „
C=12 „	1 Tag	$^{15}/_{15}$ „	15 „	30 „
			53 Tage	106 Tage.

Will Jeder 12 Batzen verdienen, so muß A = $^{12}/_{9}$ Tage, B = $^{12}/_{10}$ Tage und C 1 Tag arbeiten; wenn also A = 20 Tage arbeitet, muß B = 18 Tage und C = 15 Tage arbeiten. 20+18+15=53. Arbeiten sie zusammen 53 Tage, so hat A = 20 Tage, B = 18 Tage und C = 15 Tage gearbeitet; arbeiten sie zusammen 106 Tage, so hat A 40 Tage, B 36 Tage, C 30 Tage gearbeitet.

12) Es sei ein Schritt von B = 1′, so ist ein Schritt von A = 2′; da B 5 Mal so viele Schritte macht, als A, so legt B 5′ zurück, während A 2′ zurücklegt, und folglich eilt B 3′ voran, so oft dieses Verhältniß eintritt.

B eilt 3′ voran, wenn A 2′ und B 5′ zurücklegen;
B „ 300′ „ , „ A 200′ „ B 500′ „ .

In dieser Aufgabe ist das Verhältniß der Anzahl und das Verhältniß der Größe der Schritte zweier Personen, so wie die Anzahl Fuß, um welche die eine Person nach einiger Zeit vorgeeilt ist, gegeben, und es soll berechnet werden, wie viel Fuß jede Person bis dahin zurückgelegt habe. — Aus den gegebenen Verhältnissen berechnete ich, wie sich die von beiden Personen in gleicher Zeit zurückgelegten Wegstrecken zu einander verhalten, und gab diese Längen in Fuß an. Der Unterschied dieser Längen bezeichnet die Strecke, welche die zweite Person vorausgeeilt ist. Aus dem Verhältniß dieses Unterschiedes zu der von jeder Person zurückgelegten Strecke habe ich die Anzahl Fuß berechnet, welche jede Person zurückgelegt hatte, als die eine um die angegebene Anzahl Fuß vorangeeilt war.

13) Verhält sich die Verkaufsumme zur Einkaufsumme wie 120 : 100,

so kostet der Ztnr. 60 fl.; verhält sich die Verkaufssumme zur Einkaufssumme wie 82 : 100, so kostet der Ztnr. 41 fl.

100 Pfd. = 41 fl.; 1 Pfd. = $24^3/_5$ Kzr.

14)

1. Verk.	Eink.	Eink.	2. Verk.
86	100	100	124
43	x	50	x′
x = 50 Kzr.		x′ = 62 Kzr.	

Also wurde 1 Pfd. für 1 fl. 2 Kzr. verkauft.

15) So oft er 21 Kzr. bezahlt, ist 1 Groschen, 1 Sechser u. 1 Zwölfer dabei,
⸗ ⸗ ⸗ 21 fl. ⸗ , sind 60 ⸗ 60 ⸗ ⸗ 60 ⸗ ⸗ ,
⸗ ⸗ ⸗ 420 fl. ⸗ , ⸗ 1200 ⸗ 1200 ⸗ ⸗ 1200 ⸗ ⸗ .

16) 96 — 16 = 80.
Die kleinere Zahl ist $^{80}/_2 = 40$; die größere Zahl ist $= {^{80}/_2} + 16 = 40 + 16 = 56$.

17) 253 — 79 = 174.
Die kleinere Zahl = $^{174}/_2 = 87$; die größere = 87 + 79 = 166.

18) Für 16 fl. erhält man 1 Mltr. Weizen und 1 Mltr. Gerste,
⸗ 128 fl. ⸗ ⸗ 8 ⸗ ⸗ ⸗ 8 ⸗ ⸗ .

19) 10000 Mann — 7500 Mann = 2500 Mann. Nachdem sie 3 Wochen gezehrt, und so viel Lebensmittel verloren haben, als man für 3 Wochen nöthig gehabt hätte, so haben
10000 Mann noch Lebensmittel auf 3 Wochen,
2500 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ x Wochen?

x = 12 Wochen.

20) Wenn Jeder 40 Kzr. verdienen will, so muß A. $^{10}/_9$ Tag und B. 1 Tag arbeiten; sollen sie also gleichviel verdienen, so muß A. so oft 10 Tage arbeiten, als B. 9 Tage arbeitet. Wenn sie zusammen 19 Tage arbeiten, muß A. 10 Tage und B. 9 Tage arbeiten; wenn sie zusammen $3 \times 19 = 57$ Tage arbeiten, so kommen auf A. 30 Tage und auf B. 27 Tage.

21) Will Jeder 6 Batzen verdienen, so muß A. $^6/_4$ Tage, B. $^6/_5$ Tage und C. 1 Tag arbeiten, oder A. = $^{30}/_{20}$ Tage, B. = $^{24}/_{20}$ Tage und C. = $^{20}/_{20}$ Tage. Sie verdienen also gleichviel, wenn A. 30 Tage, B. 24 Tage und C. 20 Tage arbeiten. Da aber B. zweimal so viel als A., und C. dreimal so viel als A. verdient hat; so muß, wenn A. 30 Tage gearbeitet hat, B. 48 Tage und C. 60 Tage gearbeitet haben. 30 + 48 + 60 = 138.

Wenn sie zusammen 138 Tage arbeiten, so hat A. = 30, B. = 48 und C. = 60 Tage gearbeitet; haben sie zusammen ein Geschäft in 207 Tagen verrichtet, so kommen auf A. 45 Tage, auf B. 72 Tage und auf C. 90 Tage.

22) Nachdem die 10 Tagelöhner 10 Tage gearbeitet haben, kommen noch 5 Arbeiter dazu; 10 Arbeiter hätten also noch 50 Tage zu thun, mithin brauchen zu demselben Geschäfte 15 Arbeiter nur $33\frac{1}{3}$ Tage. Nach 5 Tagen hätten 15 Arbeiter, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiteten, noch $28\frac{1}{3}$ Tage zu thun; also haben 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, $42\frac{1}{2}$ Tage zu thun. Man bringt aber jetzt in 3 Tagen so viel fertig, als früher in 4 Tagen.

Hat man früher 4 Tage gebraucht, so wird man jetzt in 3 Tagen fertig;
" " " $\frac{85}{2}$ " " " " " " " $31\frac{7}{8}$ " " .

23) A. kauft 1 Elle für 2 fl. 30 Kzr., und verkauft sie für 3 fl.; folglich gewinnt er an jeder Elle 30 Kzr.

Gewinnt er 30 Kzr. an 1 Elle, so
gewinnt " 30 fl. " 60 Ellen.

So oft er $\frac{5}{2}$ fl. ausgab, gewann er $\frac{1}{2}$ fl.;
" " " 100 fl. " " 20 fl.

Also hatte er 60 Ellen, und gewann 20 pCt.

24) Verdient der Diener in 12 Monaten 36 fl. und 1 Rock, so verdient er in 8 Monaten 24 fl. und $\frac{2}{3}$ Rock; also wurden ihm für $\frac{1}{3}$ Rock 4 fl. angerechnet, und der ganze Rock war demnach 12 fl. werth.

25) Für 16 Kzr. bekommt er 1 Tag die Kost; also bekommt er für 30 Kzr. $\frac{15}{8}$ Tage die Kost. So oft er demnach 1 Tag arbeitet, so verdient er so viel, daß er für $\frac{15}{8}$ Tage die Kost bezahlen kann, oder wenn er 8 Tage arbeitet, kann er 15 Tage feiern. 8 + 15 = 23.

Unter 23 Tagen sind 8 Arbeitstage und 15 Ruhetage;
" 115 " " 40 " " 75 " .

Also hat er 40 Tage gearbeitet.

26) Verkaufs. Einkaufs.

Verkaufs.	Einkaufs.	
120	100	1 Stück = 125 fl.
150	x	20 " = 2500 fl.
x = 125 fl.		2560 fl. — 2500 fl. = 60 fl.

Also kosten 24 Ellen = 60 fl., 1 Elle = $2\frac{1}{2}$ fl.

fl.	Elle
$^5/_2$	1
125	x′

x′ = 50 Ellen.

27) A = 1 Theil | 39′
B = 1 „ + 1′ | 40′
C = 1 „ + 2′ | 41′

3 Theil + 3′ = 120′
3 „ = 117′
1 „ = 39′

28) A = $^1/_7$ Theil = $^{30}/_{210}$ Theil
B = $^1/_5$ „ = $^{42}/_{210}$ „
C = $^1/_6$ „ = $^{35}/_{210}$ „
D = $^{103}/_{210}$ „

$^{107}/_{210}$ Theil = 321 fl.
1 „ = x fl.

x = 630 fl.

Also hatte er im Ganzen 630 fl., im ersten Beutel 90 fl., im zweiten 126 fl., im dritten 105 fl. und im vierten 309 fl.

29) 360 + 300 = 660.

660 fl. reichen für 1 Sohn und für 1 Tochter;
3300 fl. „ „ 5 Söhne „ „ 5 Töchter.

Es bleiben also noch 300 fl., d. h. so viel übrig, als der Antheil einer Tochter beträgt; folglich waren es 5 Söhne und 6 Töchter.

30) Wären es 3000 Fußgänger, so kosteten sie 15000 fl., und es blieben 3000 fl. übrig. Wenn man 3 fl. mehr hat, als ein Fußgänger kostet, so kann man 1 Reiter besolden; man hat einen Ueberschuß von 3000 fl. = 1000 × 3 fl.; also kann man 1000 Reiter besolden. Es waren mithin 2000 Fußgänger und 1000 Reiter.

31) Die Anzahl der Artilleristen ist die geringste, man kann sie als 1 Theil ansehen.

Artilleristen = 1 Theil,
Reiter = 5 Theile,
Fußgänger = 8 Theile.

14 Th. = 4200
1 „ = 300.

Also waren es 300 Artilleristen, 1500 Reiter und 2400 Fußgänger.

32) P kauft 1 Elle für $^{19}/_{2}$ Kzr., und verkauft sie für $^{32}/_{3}$ Kzr., folglich gewinnt er an jeder Elle $^{7}/_{6}$ Kzr.

Gewinnt er $^{7}/_{6}$ Kzr. an 1 Elle, so
" " 14 fl. " 720 Ellen.

So oft er $^{19}/_{2}$ Kzr. ausgab, gewann er $^{7}/_{6}$ Kzr.
" " " 100 fl. " , " " $12^{16}/_{57}$ fl.

Also hatte er 720 Ellen und gewann $12^{16}/_{57}$ pCt.

33) Die erste Röhre füllt den Trog in 24 Stunden, also in 1 Stunde $^{1}/_{24}$ des Troges; die zweite Röhre füllt den Trog in 16 Stunden, also füllt sie in 1 Stunde $^{1}/_{16}$ vom Trog. Wenn beide Röhren laufen, so füllen sie in 1 Stunde $^{1}/_{24} + ^{1}/_{16} = ^{5}/_{48}$ Trog.

$^{5}/_{48}$ Trog füllen beide Röhren in 1 Stunde,
den ganzen Trog füllen beide Röhren in $9^{3}/_{5}$ Stunden.

34) $^{1}/_{12} - ^{1}/_{18} = ^{1}/_{36}$.

$^{1}/_{36}$ vom Behälter wird in 1 Stunde gefüllt, der ganze Behälter wird in 36 Stunden gefüllt.

35) Die erste Röhre füllt in 1 Stunde $^{1}/_{2}$ vom Trog,
" zweite " " " 1 " $^{1}/_{3}$ " " ,
" dritte " " " 1 " $^{1}/_{6}$ " " ,
" vierte " " " 1 " $^{1}/_{4}$ " " .

$^{1}/_{2} + ^{1}/_{3} + ^{1}/_{6} + ^{1}/_{4} = ^{15}/_{12}$.

$^{15}/_{12}$ Trog würden von den 4 Röhren in 1 Stunde gefüllt, der ganze Trog wird demnach von den 4 Röhren in $^{4}/_{5}$ Stunden oder 48 Minuten gefüllt.

36) Die erste Röhre füllt den Trog in 18 Stunden, also in 1 Stunde $^{1}/_{18}$ Trog; die zweite Röhre füllt den Trog in 15 Stunden, also in 1 Stunde $^{1}/_{15}$ Trog; durch die Oeffnung läuft das Wasser in 9 Stunden ab, also in 1 Stunde $^{1}/_{9}$. $^{1}/_{18} + ^{1}/_{15} = ^{11}/_{90}$; also werden $^{11}/_{90}$ Trog von beiden Röhren in 1 Stunde gefüllt, und $^{1}/_{9}$ der Wassermasse, welche der Trog hält, läuft durch die Oeffnung in 1 Stunde ab, mithin bleibt $^{1}/_{90}$.

$^{1}/_{90}$ Trog wird in 1 Stunde gefüllt,
der ganze Trog wird in 90 Stunden gefüllt.

37) Hätte ich $100^{1}/_{6}$ fl. eingenommen, so bekäme der Eigenthümer 100 fl.; ich habe 1202 fl. $= 12 \times 100^{1}/_{6}$ fl. eingenommen, also bekommt der Eigenthümer 12×100 fl. $= 1200$ fl.

38) Soll man in P. 54 Kzr. = $^9/_{10}$ fl. erhalten, so muß N. 1 fl. auf die Post legen;

soll man in P. 9 fl. erhalten, so muß N. 10 fl. auf die Post legen;

" " " " 630 " " , " " " 700 " " " " "

39) Der erste Bote hat schon 30 Meilen zurückgelegt, welche der andere einholen muß.

2 Meilen holt er in 1 Tag ein;

30 " " " " 15 Tagen ein.

40) Der Minutenzeiger muß einmal herum, bis er wieder auf XII steht; alsdann steht der Stundenzeiger auf 1 Uhr. Der Minutenzeiger macht 12 Stunden auf dem Zifferblatt, bis der Stundenzeiger 1 Stunde macht; der Minutenzeiger gewinnt also 11 Stunden auf dem Zifferblatt in 1 Zeitstunde, folglich 1 Stunde auf dem Zifferblatt in $^1/_{11}$ Zeitstunde = $5^5/_{11}$ Minuten; als werden beide Zeiger gleich hinter I wieder übereinander stehen.

41) Der Minutenzeiger holt 11 Stunden auf dem Zifferblatt in 1 Zeitstunde ein; also 7 Stunden in $38^2/_{11}$ Minuten.

42) Wenn N. doppelt so alt sein soll, als M., so muß das Alter des N. 2 Theile haben, wie das Alter des M. 1 Theil hat; folglich ist der Unterschied 1 solcher Theil. Da nun N. 25, M. 5 Jahre alt ist, so beträgt der Unterschied der Jahre 20 Jahre. Diese 20 Jahre muß N. zweimal und N. einmal haben, was in 15 Jahren der Fall ist.

Will man wissen, wann N. dreimal so alt ist, als M., so muß in diesem Falle das Alter des N. 3 Theile haben, wie das Alter des M. 1 Theil hat; folglich ist der Unterschied 2 solche Theile. Sind 2 solche Theile = 20 Jahre, so ist ein Theil = 10 Jahre; wenu also M. 10 Jahre alt ist, d. h. in 5 Jahren, ist N. dreimal so alt, als M.

43) Von A = $^{35}/_{96}$ Maß, von B = $^1/_4$ Maß, von C = $^1/_6$ Maß, von D = $^7/_{32}$ Maß. Oder von A = $^{13}/_{42}$ Maß, von B = $^{13}/_{42}$ Maß, von C = $^8/_{42}$ Maß, von D. = $^8/_{42}$ Maß.

Vergleiche IV. Stufe §. 30. Mischungsrechnungen c.

44) Zuerst verkauft er 1 Paar für $^1/_4$ fl., sodann 1 Paar für $^1/_3$ fl. Im zweiten Falle gewinnt er also an 1 Paar 5 Kzr.

Gewinnt man 5 Kzr. an 1 Paar, so

" " 1 fl. " 12 Paaren.

45) Zuerst hat er von seinem Gelde $^3/_8$ ausgegeben, behielt also noch $^5/_8$; sodann gibt er vom Reste, also von $^5/_8$, $^4/_5$ her; $^4/_5$ von

$^5/_8 = {}^4/_5 \times {}^5/_8 = {}^1/_2 = {}^4/_8$, folglich behält er noch $^1/_8$. Er gibt vom Reste wieder $^1/_3$ aus, also $^1/_3$ von $^1/_8 = {}^1/_3 \times {}^1/_8 = {}^1/_{24}$, behält also $^1/_8 - {}^1/_{24} = {}^1/_{12}$.

Ist $^1/_{12}$ seines Geldes = 48 Kzr., so sind $^{12}/_{12}$ oder seine ganze Baarschaft = 9 fl. 36 Kzr. Im Anfange hat er $^3/_8$ davon ausgegeben, d. i. 3 fl. 36 Kzr.

Anm. Auch bei diesen Rechnungen führe man, sobald das ursprüngliche Frageglied berechnet ist, dasselbe als bekanntes Glied in die Rechnung ein, und mache eines der bekannten Glieder zum Fragegliede. Z. B. Jemand hat 9,6 fl.; davon hat er einen gewissen Theil, dann wieder vom Rest $^1/_3$ ausgegeben, und noch 48 Kzr. übrig behalten. Den wie vielten Theil hat er zuerst ausgegeben?

46) 1 Theil + $^1/_2$ Theil + $^1/_3$ Theil + 5 Jahre = 60 Jahre; $^{11}/_6$ Thl. + 5 Jahre = 60 Jahre.

Sind $^{11}/_6$ Theil, wenn noch 5 Jahre dazu gezählt werden, = 60 Jahre; so sind $^{11}/_6$ Theil = 55 Jahre, also ist $^1/_6$ Theil = 5 Jahre, und 1 Theil = 30 Jahre.

Mithin war er 30 Jahre alt.

47) 1) fl. (1 Jahr) fl. (baar)

fl. (1 Jahr)	fl. (baar)
104	100
150	x

$x = 144\,^3/_{13}$ fl.

2) fl. (2 Jahr) fl. (baar)

fl. (2 Jahr)	fl. (baar)
108	100
150	x'

$x' = 138\,^8/_9$ fl.

3) fl. (3 Jahr) fl. (baar)

fl. (3 Jahr)	fl. (baar)
112	100
150	x''

$x'' = 133\,^{13}/_{14}$ fl.

4) fl. (4 Jahr) fl. (baar)

fl. (4 Jahr)	fl. (baar)
116	100
150	x'''

$x''' = 129\,^9/_{29}$ fl.

5) fl. (5 Jahr) fl. (baar)

fl. (5 Jahr)	fl. (baar)
120	100
150	x''''

$x'''' = 125$ fl.

Die ganze Baarzahlung beträgt $671\,^{17033}/_{47502}$ fl.

48)

Es fuhren in der 1. Stunde	i. d. 2. Stde.	i. d. 3. Stde.	i. d. 4. Stde.
A = 15 Ztnr.	$7\,^1/_2$ Ztnr.	$7\,^1/_2$ Ztnr.	$7\,^1/_2$ Ztnr.
B = 15 „	$17\,^1/_2$ „	$5\,^5/_6$ „	$5\,^5/_6$ „
C = 15 „	$17\,^1/_2$ „	$23\,^1/_3$ „	$23\,^1/_3$ „
D = 15 „	$17\,^1/_2$ „	$23\,^1/_3$ „	$23\,^1/_3$ „

Also erhält A = 15 fl. + $7\,^1/_2$ fl. + $7\,^1/_2$ fl. + $7\,^1/_2$ fl. = $37\,^1/_2$ fl.
B = 15 „ + $17\,^1/_2$ „ + $5\,^5/_6$ „ + $5\,^5/_6$ „ = $44\,^1/_6$ fl.
C = 15 „ + $17\,^1/_2$ „ + $23\,^1/_3$ „ + $23\,^1/_3$ „ = $79\,^1/_6$ fl.
D = 15 „ + $17\,^1/_2$ „ + $23\,^1/_3$ „ + $23\,^1/_3$ „ = $79\,^1/_6$ fl.

60 Ztnr. 4 Stunden weit zu führen = 240 fl.

49) Wenn man von 13500 fl. in $3\frac{3}{4}$ Jahren eine gewisse Summe Zins will, muß man 6 v. H. nehmen; wenn man von 15000 fl. in 3 Jahren dieselbe Summe Zins will, muß man $6\frac{3}{4}$ v. H. nehmen.

50) 200 fl. tragen in 2 Jahren so viel Zins, als 400 fl. in 1 Jahr,
400 = = = 4 = = = = , = 1600 = = 1 =
1200 = = = 12 = = = = , = 14400 = = 1 =
16400 fl. in 1 Jahr.

1000 fl. tragen in 2 Jahren so viel Zins, als 2000 fl. in 1 Jahr,
600 = = = 4 = = = = , = 2400 = = 1 =
4400 fl. in 1 Jahr.

16400 fl. — 4400 fl. = 12000 fl.

fl.	Jahr
12000	1
200	x

x = 60 Jahre.

Vergl. IV. Stufe. §. 26. C.

51) Angenommen, das Kapital sei so groß, daß den Bedingungen der Aufgabe genügt würde, wenn der Schuldner nach dem ersten Jahre 100 fl. abtrüge; in diesem Falle hätte er also 100 fl. und den Zins vom Kapital nach dem ersten Jahre zu zahlen. Wenn nun der Schuldner nach dem ersten Jahre den Zins von der Schuldsumme bezahlt und von der Schuldsumme selbst 100 fl. abträgt; so beträgt der Zins im zweiten Jahre 5 fl. weniger, als im ersten Jahre, da sich die Schuldsumme um 100 fl. verringert hat. Will er also im Ganzen im zweiten Jahre eben so viel bezahlen, als im ersten Jahre; so muß er nebst den Zinsen vom Reste der Schuldsumme, 105 fl. von der Schuldsumme selbst abtragen. Im dritten Jahre beträgt die Schuldsumme 205 fl. weniger, als im ersten Jahre; also beträgt im dritten Jahre auch der Zins $10\frac{1}{4}$ fl. weniger, als im ersten Jahre. Will daher der Schuldner in diesem Jahre so viel bezahlen, als im ersten; so muß er nebst den Zinsen von dem Reste der Schuldsumme, $110\frac{1}{4}$ fl. von der Schuldsumme selbst abtragen.

$100 + 105 + 110\frac{1}{4} = 315\frac{1}{4}$.

Wäre nun die ganze Schuldsumme = $315\frac{1}{4}$ fl., so müßte er im ersten Jahre 100 fl., im zweiten 105 fl., im dritten $110\frac{1}{4}$ fl. davon abtragen; die ganze Schuldsumme ist aber = 12610 fl.

= 40 × 315¼ fl., also muß er im ersten Jahre 4000 fl., im zweiten 4200 fl. und im dritten 4410 fl. bezahlen.

Hiezu müssen noch die Zinsen gerechnet werden:

der Zins im ersten Jahre von 12610 fl. = 630½ fl.
" " " zweiten " " 8610 fl. = 430½ fl.
" " " dritten " " 4410 fl. = 220½ fl.

Also bezahlt der Schuldner im ersten Jahre 4000 fl. + 630½ fl. = 4630½ fl.; im zweiten Jahre 4200 fl. + 430½ fl. = 4630½ fl.; im dritten Jahre 4410 fl. + 220½ fl. = 4630½ fl.; folglich in jedem Jahre 4630½ fl.

Es ist in dieser Aufgabe die Größe eines zu einem bestimmten Zinsfuße ausstehenden Kapitals gegeben, das binnen einer gewissen Zeit sammt den Zinsen des bleibenden Kapitals so abgetragen werden soll, daß jedes Mal gleichviel bezahlt werde; die Größe der einzelnen Zahlungen soll gesucht werden. — Da hier keine Zahlglieder gegeben sind, aus denen unmittelbar ein bekannter Satz gebildet werden kann; so habe ich solche Zahlglieder in die Rechnung einzuführen gesucht. Zu diesem Ende habe ich angenommen, bei einer andern in ähnlicher Weise abzutragenden Schuldsumme betrage die erste Abzahlung 100 fl., habe hieraus auf den Minderbetrag der Zinsen und von diesem auf den Mehrbetrag der an der Schuldsumme selbst zu leistenden zweiten Abzahlung geschlossen und auf dieselbe Weise die am Ende des dritten Jahres an der Schuldsumme zu leistende Abtragung gefunden. Endlich habe ich aus der Summe dieser Zahlungen zu den einzelnen Abzahlungen und aus der wirklichen Schuldsumme auf die in jedem Jahre zu leistenden Abzahlungen geschlossen, die jedesmaligen Zinsen berechnet und so die nach jedem Jahre zu bezahlenden Summen übereinstimmend gefunden.

52) A verkauft 3 Ellen für 9 fl. 45 Kzr., also 1 Elle für 3 fl. 15 Kzr. Da er nun die Elle für 2 fl. 30 Kzr. eingekauft hat, so gewinnt er an einer Elle ¾ fl. B verkauft 4 Ellen für 14 fl., also 1 Elle für 3 fl. 30 Kzr., und da er die Elle auch für 2 fl. 30 Kzr. eingekauft hat, so gewinnt er an 1 Elle 1 fl.

Mit 5/2 fl. gewinnt A in 6 Monaten ¾ fl.
" 100 " " A " 12 " 60 fl.

Mit 5/2 fl. gewinnt B in 12 Monaten 1 fl.
" 100 " " B " 12 " 40 fl.

Also hat A 60 pCt. und B 40 pCt., folglich A 20 pCt. mehr gewonnen, als B.

53)			
Zu Pferd = 1 Theil	$^{6}/_{6}$ Theil	6 Theile	240 Meilen
" Wasser = $^{7}/_{2}$ "	$^{21}/_{6}$ "	21 "	840 "
" Fuß $^{7}/_{3} \times ^{7}/_{2} = ^{49}/_{6}$ "	$^{49}/_{6}$ "	49 "	1960 "
76 Theile = 3040 Meilen.		76 Theile	3040 Meilen.

1 Theil = 40 Meilen.

54) Wenn A 5 Quadratruthen erhält; so bekommt B 11□° und C 16 □°.

$5 + 11 + 16 = 32.$

Werden 32 Quadratruthen vertheilt, so erhält A 5, B 11, C 16; werden 864 Quadratruthen vertheilt, so erhält A 135, B 297, C 432 □°.

55)				
A = 3		3	24	144 Mann.
B = 5	8	5	40	240 "
C =	7	$\frac{35}{8}$	35	210 "
		99	594 Mann.

Wenn sie zusammen 99 Mann zu stellen haben; so kommen auf A 24, auf B 40, auf C 35 Mann; haben sie mit einander 594 Mann zu stellen; so kommen auf A 144, auf B 240, auf C 210 Mann.

Vgl. IV. Stufe §. 28. Gesellschaftsrechnungen, b. 13te Aufgabe.

56) $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{8}{30}$ seines mitgebrachten Geldes,
$\frac{1}{3} \quad = \frac{10}{30}$ " " " .
$\frac{10}{30} - \frac{8}{30} = \frac{2}{30}$.
Sind $\frac{2}{30}$ seines mitgebrachten Geldes = 3 fl., so
" $\frac{30}{30}$ " " " = 45 "; also
hatte er 45 fl. mitgebracht.

57) Der zweite Bote macht täglich 5 Meilen mehr, als der erste; folglich holt er 5 Meilen in 1 Tage, und 40 Meilen in 8 Tagen ein.

58) A macht in 1 Stunde $\frac{7}{5}$ Meilen, B in 1 Stunde $\frac{5}{3}$ Meilen, also macht B in 1 Stunde $\frac{4}{15}$ Meilen mehr, als A. In 8 Stunden ist A $\frac{56}{5}$ Meilen vorangeeilt.

Holt B oder der zweite Bote $\frac{4}{15}$ Meilen in 1 Stunde ein; so holt er $\frac{56}{5}$ Meilen in 42 Stunden ein.

59) B braucht zu 3 Würfen so viel Pulver, als A zu 4;
also zu 7 " " " " " A " $\frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$.
Sollten also beide gleich viel Pulver brauchen, so müßte A $9\frac{1}{3}$ Würfe thun, wenn B 7 Würfe macht; A thut aber in dieser Zeit

nur 8 Würfe; folglich holt B $\frac{4}{3}$ Würfe ein, wenn er 7 Würfe macht
und 36 " ", " " 189 " " .

In dieser Aufgabe ist bekannt die Anzahl Würfe, welche A gemacht, ehe B zu werfen anfing, das Verhältniß der Anzahl der Würfe in gleicher Zeit und das Verhältniß der Anzahl ihrer Würfe bei gleichem Pulverbedarf; gesucht soll werden, wie viel Würfe B machen muß, bis er so viel Pulver verbraucht hat, als A. — Ich habe aus den gegebenen Verhältnissen die Ladungen des B in Ladungen des A berechnet, und gefunden, daß B zu 7 Ladungen so viel Pulver braucht, als A zu $9^1/_3$ Ladungen. Hieraus habe ich ersehen, wie viele Würfe jeder in derselben Zeit thun müßte, wenn sie gleich viel Pulver brauchen wollten. Nachdem ich nun die Würfe, die A wirklich thut, von den Würfen, welche er thun sollte, um eben so viel Pulver zu verbrauchen, wie B, abgezogen, hatte ich gefunden, wie viel Würfe B einholt in der Zeit, in welcher er eine bestimmte Anzahl Würfe thut. Dieses Verhältniß habe ich als bekannten Satz angenommen und daraus berechnet, wie viel Würfe B noch zu thun hat, bis er die Würfe einholt, die A gemacht hatte, ehe er zu werfen anfing.

60) Der Hund legt in 5 Sprüngen so viel Raum zurück, als der Hase durch 7; in dieser Bedeutung sind 5 Hundssprünge = 7 Hasensprüngen, also 1 Hundssprung = $\frac{7}{5}$ Hasensprüngen, und 4 Hundssprünge = $\frac{4 \times 7}{5}$ = $\frac{28}{5}$ Hasensprüngen.

Wir haben nun die Hundssprünge in Hasensprüngen ausgedrückt und können statt 4 Hundssprüngen $\frac{28}{5}$ Hasensprünge setzen.

Wenn also der Hase 3 Sprünge thut, macht der Hund $\frac{28}{5}$ solche Sprünge, oder wenn der Hase 15 Sprünge thut, macht der Hund 28 solche Sprünge; und so oft dieses Verhältniß eintritt, holt der Hund 13 Sprünge ein.

Der Hund holt 13 Sprünge ein, wenn der Hase 15 Sprünge macht, und er holt 60×13=780 Sprünge ein, wenn der Hase 60×15=900 Sprünge macht.

Also kann der Hase noch 900 Sprünge thun, bis ihn der Hund einholt.

61) 400 Schafe, 16 Monate lang = 6400 Schafe, 1 Monat.

Er schickt 200 Schafe, 7 Mon. lang = 1400 Schafe, 1 Mon.
und 450 " 8 " " = 3600 " 1 "

5000 Schafe.

6400 Schafe — 5000 Schafe = 1400 Schafe.

1400 " darf er noch 1 Monat schicken, also
600 " " " " $2\frac{1}{3}$ " " .

Oder:

Wenn man 400 Schafe 16 Monate lang auf die Weide schicken darf, so dürfte man demnach 200 Schafe 32 Monate lang weiden lassen. Nachdem sie 7 Monate geweidet haben, durften sie nur noch 25 Monate bleiben; nun kommen noch 250 Stück dazu.

200 Schafe dürfen 25 Monate weiden,
450 " " demnach nur $11\frac{1}{9}$ Monate weiden.

Diese 450 Stück blieben 8 Monate, hätten also das Recht, noch $3\frac{1}{9}$ Monat zu weiden, als 150 Stück dazu kamen.

450 Schafe dürfen $3\frac{1}{9}$ Monat weiden,
600 " " demnach nur noch $2\frac{1}{3}$ Monat auf der Weide bleiben.

62) Hätte der Gesell 30 Tage gearbeitet, so wäre der Lohn 36 fl. gewesen; zieht man die empfangenen 13 fl. 36 Kzr. davon ab, so bleibt Rest 22 fl. 24 Kzr. = 336 Batzen.

An jedem Tage, an welchem er nicht gearbeitet hat, empfing er keinen Lohn und mußte die Kost bezahlen; also hat er an jedem Tage, an dem er gefeiert, 18 Batzen nicht empfangen und 6 Batzen bezahlen müssen, mithin 24 Batzen verloren.

24 Batzen hat er verloren, wenn er 1 Tag gefeiert hat,
336 " " " " , " " 14 Tage " ".

Also hat er 16 Tage gearbeitet und 14 Tage gefeiert.

63) Hätte er jeden Tag 5 fl. ausgegeben, so wäre die ganze Ausgabe = 30 × 5 fl. = 150 fl. gewesen.

226 fl. — 150 fl. = 76 fl. So vielmal nun 4 fl. in 76 fl. enthalten sind, so vielmal hat er 4 fl. mehr bezahlt, als 5 fl.; 4 fl. sind in 76 fl. 19 Mal enthalten. Also reiste er 19 Tage zu 9 fl. und 11 Tage zu 5 fl.

64) B legte ein: 1800 fl. 6 Monate lang; diese tragen so viel Zins, als 10800 fl. in 1 Monate.
ferner 2500 fl. in $33\frac{2}{3}$ Monaten = $84166\frac{2}{3}$ " in 1 " .

Also im Ganzen $94966\frac{2}{3}$ fl., 1 Monat.

R legte ein: 2000 fl., $5\frac{1}{2}$ Mon. = 11000 fl., 1 Mon.
1500 ", 9 " = 13500 ", 1 "
3000 ", $22\frac{5}{6}$ " = 68500 ", 1 "

Also im Ganzen 93000 fl., 1 Mon.

W legte ein 2400 fl., $30\frac{1}{2}$ Mon. = 73200 fl., 1 Mon.

Die gesammte Einlage war also $94966\frac{2}{3}$ fl. + 93000 fl. + 73200 fl. = $261166\frac{2}{3}$ fl.

Mit $261166\frac{2}{3}$ fl. Einlage gewinnt man 2800 fl.,

" $94966\frac{2}{3}$ " " " " $1018\frac{234}{1567}$ fl.

Hiezu die Einlage des B mit 2500 fl., so erhielt an Kapital und Gewinn zurück B = $3518\frac{234}{1567}$ fl., R = $3997\frac{101}{1567}$ fl., W = $3184\frac{1232}{1567}$ fl.

65) 4800 preußische Thaler = 8400 fl.

Was er für 120 fl. verkaufte, hat ihn 100 fl. gekostet (Einkaufsumme + Fracht).

Was er für 8400 fl. verkaufte, hat ihn 7000 fl. gekostet.
So oft er 112 fl. bezahlte, betrug die Einkaufssumme 100 fl.,
wenn er 7000 " ausgab, " " " 6250 " .

66) In $3\frac{4}{5}$ Jahren.

67) 3 fl. 6 Kzr. — 2 fl. 48 Kzr. = 18 Kzr.

fl.	Mon.	fl. Gew.
$2\frac{4}{5}$	5	$\frac{3}{10}$
100	12	x

x = $25\frac{5}{7}$ fl.

Da er in 12 Monaten nur 16 pCt. zu gewinnen weiß, so gewinnt er bei baarer Zahlung $9\frac{5}{7}$ pCt.

68) Den Zinsfuß zu 5 v. H. angenommen, sind 21000 fl. über 1 Jahr so viel werth, als 20000 fl. baar; also bieten A und B gleichviel.

C will 11500 fl. sogleich und 10000 fl. in 2 Jahren bezahlen. Man berechne, wie groß die Baarzahlung demnach wäre.

fl. (2 Jahre)	fl. (baar)
110	100
10000	x

x = 9090 fl. $54\frac{6}{11}$ Kzr.; hiezu 11500 fl., so ist der gegenwärtige Werth dieses Gebots = 20590 fl. $54\frac{6}{11}$ Kzr. Mithin hat C = 590 fl. $54\frac{6}{11}$ Kzr. mehr geboten, als A und B.

D will 16000 fl. baar und den Rest von 6000 fl. in 6 Terminen, nämlich jedes Jahr 1000 fl. bezahlen. Man berechne wieder den gegenwärtigen Werth dieses Anerbietens.

fl. (1 Jahr)	fl. (baar)	fl. (2 Jahr)	fl. (baar)
105	100	110	100
1000	x′	1000	x″

x′ = $952\frac{8}{21}$ fl. x″ = $909\frac{1}{11}$ fl.

fl. (3 Jahr)	fl. (baar)		fl. (4 Jahr)	fl. (baar)
115	100		120	100
1000	x'''		1000	x^{IV}

$x''' = 869\frac{13}{23}$ fl. $\qquad x^{IV} = 833\frac{1}{3}$ fl.

fl. (5 Jahr)	fl. (baar)		fl. (6 Jahr)	fl. (baar)
125	100		130	100
1000	x^{V}		1000	x^{VI}

$x^{V} = 800$ fl. $\qquad x^{VI} = 769\frac{3}{13}$ fl.

Also bietet D baar 16000 fl. + $5133\frac{13841}{23023}$ fl. = $21133\frac{13841}{23023}$ fl. und mithin ist sein Gebot das beste.

69) A war 15 Tage länger im Gasthause als B, und hat in diesen 15 Tagen 60 fl. verzehrt.

195 fl. — 60 fl. = 135 fl.

Wenn sie nun zusammen 9 fl. verzehren, so ist jeder 1 Tag im Gasthause geblieben; wenn sie zusammen 135 fl. verzehren, so ist jeder 15 Tage im Gasthause geblieben.

Also A = 30 Tage, B = 15 Tage.

70) 5 vierspännige Fuhren schaffen so viele Ziegel fort, als 8 dreispänn.,
3 „ „ „ „ „ „ „ „, „ $\frac{24}{5}$ „ .

Sollten nun durch beide Wägen gleich viel Ziegel gefahren werden, so müßte der dreispännige Wagen $\frac{24}{5}$ Fuhren thun, wenn der vierspännige 3 Fuhren thut; der dreispännige thut aber in dieser Zeit nur $4 = \frac{20}{5}$ Fuhren, folglich holt der Vierspänner $\frac{4}{5}$ Fuhren ein, so oft er 3 Fuhren thut. Der Vierspänner holt $\frac{4}{5}$ Fuhren ein, wenn er 3 Fuhren thut, folglich holt er 24 Fuhren ein, wenn er 90 Fuhren thut.

V. Stufe.

§. 34.

Praktische Aufgaben in zehntheiligen Brüchen.

a. Resolution.

Höhere Einheiten werden in niedere Einheiten verwandelt nach Regel VIII., §. 14.

1) 0,57 fl. = 0,75 . 60 Kzr. = 34,2 Kzr. 2) 3 Loth 3,36 Quentchen. 3) $7'\,8''\,9'''$. 4) 17 Fuder 9 Ohm 5 Stützen 4 Maß 7 Glas. 5) 43,74 Kzr. 6) 73 Pfd. 4 Loth 2,6368 Quentchen. 7) 5 Mon. 4 Tage 19 Stdn. 12 Min. 8) 69 Jahre 20 Tage 15 Stdn. 43,7184 . . . Min. 9) 7 Mltr. 1 Sester 3 Mäßlein. 10) 7 Rieß 10 Buch 14,4 Bogen. 11) $87'^{\,q}$. 12) $34'\,56''\,78{,}9'''^{\,q}$. 13) $150^{0}\,40'^{\,q}$. 14) $730'^{\,c}$. 15) $79^{0}\,530'\,876''\,540'''^{\,c}$. 16) 161 Sgr. 7,536 Pf. 17) 1 fl. $34\frac{1}{2}$ Kzr. 18) $129{,}6'^{\,c}$.

b. Reduktion.

Niedere Einheiten werden in höhere verwandelt nach Regel IX, §. 14.

1) 37 Kzr. = $\frac{37}{60}$ fl. = 0,6166 . . . fl. 2) 0,58333 . . . fl. 3) 0,0291666 . . . fl. 4) 0,6527 . . . pr. Thlr. 5) 0,0021875 Ztnr. 6) $0{,}703^{0}$. 7) $43{,}172305^{0\,q}$. 8) 13 Bog. = $\frac{13}{24}$ Buch. $7\frac{13}{24}$ Buch = $\frac{181}{24}$ Buch = $\frac{181}{24.20}$ Rieß. $8\frac{181}{480}$ Rieß = $\frac{4021}{480}$ Rieß = $\frac{4021}{4800}$ Ballen = 0,83770833 . . . Ballen. 9) 0,000234375 Ztnr. 10) 0,636796875 Ztnr. 11) 0,1632 . . . Wochen. 12) 0,255 . . . Jahre (1 Jahr = 360 Tage). 13) 0,59205 . . . Jahre (1 Jahr = 360 Tage à 24 Stdn. à 60 Min.). 0,58394 Jahre (1 Jahr = 365 Tage). 14) 0,546721 . . Jahre (1 Jahr = 365 Tage). 15) 0,378 Ohm. 16) $0{,}1909^{m.q}$. 17) $0{,}027113004^{0\,c}$. 18) 0,0875 Kilogramm.

c. Verwandlung des zehntheiligen Längen-, Flächen- und Körpermaßes in gemeines Maß, und umgekehrt.

1) 1^{0} zehntheiliges Maß = 10 . 10 . 10 = $1000'''$. 1^{0} sechzehnfüßiges Maß = 16 . 12 . 12 = $2304'''$.

Zehnth.	Sechzehnfüß.
$1000'''$	2304
$18306'''$	x

x = $18^{0}\,4'\,10''\,9{,}024'''$ sechzehnfüß. Maß.

2) $13^{0}\,6''$ zwölffüßiges Längenmaß = $1878''$.

Zwölffüß.	Zehnth. Maß
$144''$	$100''$
1878	x

x = $13^{0}\,4''\,1'''\,6\frac{2}{3}^{\,IV}$.

3) 98° 44′ 19″ 119,927808‴ (16′ q).
4) 21° 26′ 67″ $82\frac{2112}{5184}$‴ (10′ q).
5) 91° 20′ 899,679744″ (6′ c).
6) 122° 7′ $568\frac{4543616}{7077888}$″ (10′ c).

d. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bei zehntheiligen Größen.

1) 141° 2″ 6‴. 2) 1° 1′ 3″ 8‴ 9^{IV}. 3) 80° 1′ 1‴ 5^{IV}. 4) 6′ 4^{IV}. 5) 131° 52′ 21″ 14‴ q. 6) 15′ 7″ 95‴ q. 7) 90° 45′ 60″ 15‴ q. 8) 2° 50′ 17‴ q. 9) 120° 202′ 121″ 849‴ c. 10) 997′ 7‴ c. 11) 1942° 80′ 60″ 320‴ c. 12) 800′ 351,1″ c. 13) $3\frac{543}{2500} = 3{,}2172$. 14) $6\frac{7711}{8802}$. 15) $3\frac{359099}{882000}$.

§. 35.

Vergleichung der badischen Maße, Gewichte und Münzen mit den französischen.

Unter dem französischen Decimal-System (système métrique) versteht man das Maß- und Gewichtssystem, welches in Frankreich eingeführt ist, und zu dessen Bestimmung als Grundmaß der zehnmillionste Theil vom Quadranten des Erd-Meridians genommen und Meter (Mètre) genannt wurde. (Siehe meine Raumformen- und Raumgrößenlehre §. 9.) Die in Folge dieses Systems zur Einheit genommenen Maße sind folgende:

Meter = $3\frac{1}{3}$′ bad. ist die Einheit des Längenmaßes,

Are = 100 Quadratmeter ist die Einheit des Flächen- und Feldmaßes,

Stere = $1^{m\,c}$ ist die Einheit des Holz- und Kohlenmaßes,

Liter = 1 Kubikdecimeter ist die Einheit des Getreide- und Flüssigkeitsmaßes,

Gramm = dem Gewicht von 1 Kubikcentimeter destillirten Wassers bei 4° Celsius, ist die Einheit für das Gewicht,

Frank = 5 Grammen in Silber, ist die Einheit der Münze.

Den Maßen und Gewichten, welche 10, 100, 1000, 10000 Mal so groß sind als die Einheit, werden die griechischen Zahlwörter Deka = 10, Hekto = 100, Kilo = 1000, Myria = 10000 vorgesetzt; denjenigen aber, welche 10, 100, 1000 Mal so klein sind als

die Einheit, die lateinischen Zahlwörter Deci = $\frac{1}{10}$, Centi = $\frac{1}{100}$, Milli = $\frac{1}{1000}$ vorgesetzt.

Diese Ober- und Unterabtheilungen der Einheit werden aber nur auf den Meter und das Gramm aufwärts bis zum Myriameter und Myriagramm, abwärts bis zum Millimeter und Milligramm angewandt. Beim Flächen- und Feldmaß wird nur nach Hektare, Are und Centiare, beim Holz- und Kohlenmaße nach Dekastere, Stere und Decistere, beim Hohlmaße nach Hektoliter, Dekaliter, Liter, Deci- und Centiliter gerechnet.

a. Längenmaß.

Jeder Schüler hat sich einen Meter, in 100 Theile getheilt, zu fertigen.

1)

x	$17{,}28^{m}$
3	$10'$

$x = 57{,}6'$

2) $141{,}927^{m}$. 3) $29{,}1^{m}$.

4) $16{,}902^{m} = 16^{m}\ 9^{dm}\ 2^{mm}$.

5) $24{,}171^{m}$. 6) $1^{dm} = \frac{1}{10}{}^{m}$; $1'' = \frac{1}{10}{}'$; also verhält sich 1^{dm} zu $1''$ wie $1^{m} : 1'$. Mithin sind $3^{dm} = 10''$.

Oder:

x	1^{dm}
10	1^{m}
3	$10'$
1	$10''$

$x = \frac{10''}{3}$

$1^{dm} = \frac{10''}{3}$
$3^{dm} = 10''$.

Aus denselben Gründen sind auch $3^{cm} = 10'''$.

7) $25{,}03'$. 8)

x	100^{m}
3	1^{0}

$x = 33\frac{1}{3}{}^{0}$

9)

x	$2'$
10	3^{m}

$x = \frac{3}{5}{}^{m}$

Also ist 1 Elle = $\frac{3}{5}{}^{m}$ oder 5 Ellen = 3^{m}.

10) $22{,}05^{m}$.

b. Flächenmaß.

1) Ein Quadratmeter ist ein Quadrat, dessen Seite = 1^{m} ist. Man findet den Inhalt eines Quadrats, wenn man die Zahl, welche die Länge einer Seite angibt, zweimal als Faktor ansetzt (Raumformen- und Raumgrößenlehre, §. 13, 4). Ein Quadrat, dessen Seite 3^{m} lang ist, enthält also $3 \times 3 = 9$ Quadratmeter ($9^{m.q}$). Wenn man die Seite desselben Quadrates mit dem badischen Fuß ausmißt, so wird man finden,

daß sie $10'$ lang ist; also enthält auch das Quadrat $10 \times 10 = 100$ Quadratfuß ($100'^{q}$). Es sind mithin $9^{m.q} = 100'^{q}$.

2) Ein Quadrat-Decimeter ist ein Quadrat, dessen Seite $\frac{1}{10}^{m}$ lang ist; also enthält das Quadrat $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}^{m.q}$. Demnach sind 100 Quadratdecimeter ($100^{dm.q.}$) = 1 Quadratmeter ($1^{m.q}$). Ein Quadrat-Centimeter $= \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}^{m.q}$; also sind $10000^{cm.q} = 1^{m.q}$.

3) $500^{cm.q}$. 4) 1 Quadrat-Dekameter ist ein Quadrat, dessen Seite 10^{m} lang ist; also sind 25 Quadrat-Dekameter $= 2500^{m.q}$.

5)

x	$1^{dm.q.}$
100	$1^{m.q}$
9	$100'^{q}$
1	$100''^{q}$

$x = 11\frac{1}{9}''^{q}$

6) $283'^{q}$. 7) $0{,}0783^{m.q}$. 8) $75{,}3327^{m.q}$. 9) $745{,}888\ldots'^{q}$.

10) $4{,}323573^{m.q}$. 11) $2777777{,}777\ldots'^{q}$. 12) $275^{m}\ 73^{dm}\ 5^{cm.q} = 275{,}7305^{m.q} = 3063{,}672\ldots'^{q}$.

c. Kubikmaß.

1) Ein Kubikmeter ist ein Würfel, dessen Seite 1^{m} lang ist. Man findet den Inhalt eines Würfels, wenn man die Zahl, welche die Länge einer Seite angibt, dreimal als Faktor ansetzt. (Raumformen- und Raumgrößenlehre §. 19, 2.) Bezeichnet man den Würfel- oder Kubikinhalt mit c, die Länge der Seite mit s; so ist $c = s \times s \times s = s^3$.

Ein Würfel (Kubus), dessen Seite 3^{m} lang ist, enthält $3^3 = 27^{m.c}$. Wird eine Seite dieses Würfels mit dem badischen Fuß ausgemessen, so findet man, daß sie $10'$ lang ist. Derselbe Würfel enthält also auch $10^3 = 1000'^{c}$; mithin sind $27^{m.c} = 1000'^{c}$.

2) Ein Kubik-Decimeter ist ein Würfel, dessen Seite $\frac{1}{10}^{m}$ lang ist, also enthält ein Kubik-Decimeter $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}^{m.c}$; mithin sind $1000^{dm.c} = 1^{m.c}$.

Ein Kubik-Centimeter $= (\frac{1}{100})^3 = \frac{1}{1000000}^{m.c}$; mithin sind $1000000^{cm.c} = 1^{m.c}$.

3) $50000^{cm.c}$. 4) $30000'^{c}$. 5)

x	$5^{dm.c}$
1000	$1^{m.c}$
27	$1000'^{c}$

$x = \frac{5}{27}'^{c}$

6) $27^{dm.c} = 1000''^{c}$. 7) $3605,3703\ldots'^{c}$. 8) $15,7591035^{m.c}$. 9) $1043,073005^{m.c}$. 10) $\frac{1}{27000}'^{c}$. 11) $254,977661268^{m.c}$.

d. Hohlmaß.

1) 1000 Liter $= 1^{m\,c}$; 27 Liter $= 1'^{c}$.

2)

x	1 Liter
1000	1^{mc}
27	$1000'^{c}$
1	18 Maß

$x = \frac{2}{3}$ Maß.

Mithin sind 3 Liter = 2 Maß.

3) 1 Sester $= \frac{5}{9}'^{c} = 15$ Liter. 4) 7 Fdr. $= 388\frac{8}{9}'^{c} = 10500$ Liter. 5) 4500 Liter $= 4,5^{m.c} = 3$ Fdr. 6) $1,110^{m.c}$. 7) 4800 Maß. 8) 436,4622 ... Maß.

e. Gewicht.

1)

x	$1^{cm.c}$
1000000	$1^{m.c}$
27	$1000'^{c}$
1	54 ℔
1	32 Loth

$x = \frac{8}{125}$ Loth.

2) 500 Gramm = 1 ℔ badisch = 1 Zollvereinspfund; 125 Gramm = 8 Loth. 3) 1 Liter = 1000 Gramm. 4) 1 Kilogramm = 2 ℔. 5) 27000 Gramm.

6) 1 ℔ 29,12 Loth. 7) 3 Ztnr. 57 ℔ 12,48 Loth. 8) 14921,875 Gramm. 9) 202750 Gramm. 10) 1 Ztnr. 72 ℔ 28 Loth 3,2 Quentchen.

f. Feldmaß.

1)

x	$100^{m.q}$
9	1^{0q}

$x = 11\frac{1}{9}^{0q}$.

2) 9 Aren $= 100^{0q}$.

3)

x	607,25 Aren
9	100^{0q}
1	$100'_{q}$

$x = 67472\frac{2}{9}'^{q}$.

4) 13,434552 Aren. 5) $6497,0877\ldots^{0q}$. 6) 36 Aren = 1 Morgen. 7) 2,6884833 ... Morgen. 8) 19 Morgen 7 Viertel $14^{0} = 8314^{0} = 748,26$ Aren.

g. Brennholz- und Kohlenmaß.

1) 1 Stere $= 1^{mc}$; 27 Steren $= 1000'^{c} = 1^{0c}$. 2) 125 Klafter = 486 Steren; 1 Klafter = 3,888 Steren. 3) 6 Klafter. 4) 3402 Steren. 5) 16883,533296 Steren. 6) $60,76733\ldots^{0c}$. 7) 3,5 Steren. 8) 29,16 Steren.

h. Münzen.

1)

x	1 Fr.
1	$\frac{9}{2}$ Gramm
233,855	1 Mark köln.
1	$\frac{49}{2}$ fl.
1	60 Kzr.

x = 28,2 Kzr.

2) 7 fl. = 15 Franken. 3) 1,56 Fr. 4) 217,322 fl. 5) 15 Thlr. 6) 322 Fr. 7) 407 Fr. 8) 24,1875 Thlr.

§. 36.

Aufgaben über Maße und Gewichte.

1)

x	25 pr. Fuß
3,186199	1^{m}
3	10′ bad.

x = 26,164′ . . .

2) 60,9588′. 3) 1 Wiener Fuß = 1,0536733′ . . bad. 4) 1 alter Par. Fuß = 1,0827966′ . . bad.

5) Ein preußisches Quart = 0,7633 . . . bad. Maß.

6) Ein englisches Gallon = 3,967 . . . preußische Quart = 3,02866 . . . bad. Maß.

7) 48,333 . . . bad. Maß.

8)

x	$1'^{c}$ preuß.
1	$(0{,}313853)^{3m} = 0{,}030915683516501477^{m}$
27	$1000'^{c}$ bad.
1	54 ℔ bad.

x = 61,831367033002954 ℔ bad.

9)

x	$(0{,}313853)^{3m}$
27	$1000'^{c}$ bad.
1	54 ℔ bad.
1	500 Gramm
467,7110	1 ℔ preußisch

x = 66,099970957 . . .

10)

x	$1'^{c}$ preuß.
1	$(0{,}313853)^{3m}$
27	$1000'^{c}$ bad.
1	18 Maß.

x = 20,610455677667651 3 . . . Maß.

11)

x	$17500^{cm.c.}$
1000000	$1^{m\,c}$
27	$1000'_{c}$ bad.

$x = \frac{35}{54}'^{c}$

12)

x	$453,6005^{cm.c}$
1000000	$1^{m.c}$
27	$1000'^{c}$
1	54 ℔ bad.

x = 0,9072010 Pfd. bad.

13)

x	$560,0164^{cm.c}$
1000000	$1^{m\,c}$
27	$1000'^{c}$
1	54 Pfd. bad.

x = 1,1200328 Pfd. bad.

14)

x	$(0,304794)^{3m} = 0,028315174370198184$
27	$1000'^{c}$
1	54 Pfd. bad.

x = 56,630348740396368.

15)

x	1 Stunde bad.
25	1^{0}
360	40000000^{m}
3	10' bad.

x = 14814,814814' . . .

16)

x	1 geogr. Stunde
30	1^{0}
360	40000000^{m}
3	10' bad.

2 = 12345,678' . . .

17)

x	1 Grad
360	40000000^{m}
3	1 bad. Ruthe.

$x = 37037\frac{1}{27}^{0}$

18) $x = (14814,814')^2 = 219478713,854596' \ldots ^{q}$.

19)

x	$1''^{q}$
100	$1'^{q}$
100	9^{mq}
1	$10000^{cm\,q}$
1	1000 Gramm
500	1 Pfd.

x = 18 Pfd.

20) a.

x	$1^{cm\,c}$ Luft
1	$\frac{1}{770}$ Gramm Wasser
500	1 Pfd. bad.

$x = \frac{1}{385000}$ Pfd. bad.

b.

x'	$1'^{c}$ preuß. Luft
1	$(0,313853^{m})^3$
1	$1000000^{cm.c}$
770	1 Gramm Wasser
500	1 Pfd. bad.

x' = 0,0803004766 . . . Pfd. bad.

c.

x''	$1'^{c}$ bad. Luft.
770	54 Pfd. bad.

$x = \frac{54}{770}$ Pfd. $= 2\frac{94}{385}$ Loth, ca. $2\frac{1}{4}$ Loth.

x	1 Mltr. bad.
1	10 Sester
1	10 Maß
2	3 Liter
100	30 Fr.
15	7 fl.

x = 21 fl.

22) a. 7204,032 Fr. b. 3361,8816 fl. c. 1921,0752 pr. Thlr.

23)

x	15,09 pariser Fuß
1	$0{,}324839^{m}$
3	10′ bad.

x = 16,3394017′

24) 1 Sester = $\frac{5}{9}'^{c}$. Ist d. = 1,2′; so ist die Kreisfläche = $1{,}1304'^{q}$, folglich die Höhe = $\frac{5}{9} : 1{,}1504 = 0{,}491' \ldots$ (Siehe meine Raumformen- und Raumgrößenlehre, §. 20, I.)

25)

x	100 Liter
3	2 Mäßlein
100	14,25 fl.

x = $9\frac{1}{2}$ fl.

26) 1 Sester = $\frac{5}{9}'^{c}$, 1 Schoppen = $\frac{5}{360}'^{c}$. Ist das Glas 5″ hoch; so ist die Kreisfläche = $\frac{5}{360} : 0{,}5 = \frac{1}{36}'^{q}$; folglich der Durchmesser (d) $\frac{1}{5{,}3\ldots} = 0{,}18' \ldots$

Diese Aufgabe ist nur solchen Schülern zur Auflösung zu geben, welche die Quadratwurzel ausziehen können.

27)

x	1 Pfd. preuß.
1	2 Mark
1	233,855 Gramm
500	1 Pfd. bad.

x = 0,93542 Pfd. bad.

§. 37.

Aufgaben über das verhältnißmäßige Gewicht der Körper.

1) Die Säule = $4 \times 4 \times 5 = 80'^{c}$.

x	$80'^{c}$ Wasser
1	54 Pfd.

x = 4320 Pfd.

2)

x	$3{,}08'^{c}$ Eisen
1	$7{,}788 \times 54$ Pfd.

x = 1295,30016 Pfd.

3) 5248,8 Pfd. 4) Inhalt = $\frac{7 \times 22}{4} \times 80 = 3{,}08'^{c}$. Gewicht = 1205,98632 Pfd.

5)

x	1 cm.c Luft
770	1 cm.c Wasser

$x = \frac{1}{770} = 0{,}001298\ldots$

6) 2,2464 bad. Loth.

7) 2,354022216 Pfd. 8) 74,074′...c

9) 1,44′..c

10) a.

x	1 Pfd.
54.0,89	1′c
1	18 Maß
100	60 fl.
1	60 Kzr.

$x = 13\frac{43}{89}$ Kzr.

b.

x′	1 Schoppen
4	1 Maß
100	60 fl.
1	60 Kzr.

x′ = 9 Kzr.

11)

x	1 Pfd.
54.0,815	1′c
1	18 Maß
1	4 Schoppen

x = 1,635.. Schoppen

12)

x	1′c Oel
1	18 Maß
1	4 Schoppen
1	22,08 Loth
32	1 Pfd.

x = 49,68

49,68 : 54 = 0,92.

13)

x	54 Pfd. Eis
54 × 0,93	1′c

x = 1,075268 ...

Eine Kantenlinie dieses Würfels $= \sqrt[3]{1{,}075268\ldots} = 1{,}02\ldots$

14)

x	1′c
80	2116,8 Pfd.

x = 26,46 Pfd.

26,46 : 54 = 0,49.

15)

x	20 Maß Wasser
18	1′c

x = 1,1111′c...

16) Inhalt = 0,8′c; Gewicht = 311,472 Pfd.

17) Inhalt = 219,8″c.

x	219,8″c
1000	1′c
1	54 . 7,2 Pfd. in der Luft
770	771 Pfd. im luftleeren Raum.

x = 85,5692 ... Pfd. im luftleeren Raum.

§. 38.

Aufgaben über den Gehalt, den gegenseitigen Werth und das Agio der Münzen.

1) Unter **Geld** versteht man die Tauschmittel, welche in Folge einer Uebereinkunft oder in Folge gesetzlicher Verordnungen als Zahlungswerthe gebraucht werden.

Das Geld kann sein:

a. **Wirkliches Geld oder Zahlungsmünze** (monnaie réelle oder effective). Man versteht darunter mit der Angabe des Werthes versehene geprägte Metallstücke, deren Gewicht, Größe und Form gesetzlich bestimmt sind. Die groben Münzsorten nennt man **Kurentgeld, Kurantmünze, Kassengeld**; die kleine gangbare Münze, welche nur zur Ausgleichung bei Zahlungen und im gemeinen Leben zu kleinen Ausgaben dient, wird nicht zum Kurentgelde gerechnet und heißt **Scheidemünze**, z. B. die Groschen und Sechser.

b. **Rechnungsgeld, Rechnungsmünze** (monnaie de compte), worunter man dasjenige Geld versteht, nach welchem im Handel Buch und Rechnung geführt wird. Dasselbe ist entweder zugleich Zahlungs- und Rechnungsmünze, wie z. B. in Preußen der Thaler und Groschen, in Frankreich der Frank und Decime, im Badischen der Gulden und Kreuzer; oder es ist **eingebildetes** (imaginäres, fingirtes) **Geld**, wie z. B. die Mark-Banko in Hamburg, und früher, bis zum Jahre 1843, der Reichsthaler Wechselzahlung in Frankfurt am Main.

c. **Symbolisches Geld, Zeichengeld** (papier monnaie), worunter man das Papiergeld versteht, das auf gewisse Summen eingebildeter oder wirklicher Münzen gestellt ist, wie z. B. die Banknoten, die Kassenscheine, Tresorscheine, die badischen Zweiguldenscheine u. s. w.

Anm. In einigen großen Handelsstädten hat man besondere, für den Handel bequeme und vortheilhafte Veranstaltungen getroffen. Mehrere Kaufleute nämlich haben zur Beförderung eines leichteren Verkehrs gemeinschaftlich eine Summe Geld zusammengelegt. Man nennt eine solche, unter dem Schutze der Obrigkeit stehende Anstalt eine **Bank**. Von besonderer Wichtigkeit für den Handel sind: die **Giro**- (spr. Dschiro) **Bank** und die **Zettelbank**. Bei einer Girobank haben sich die Kaufleute eines Ortes vereinigt und eine Summe Geld zusammengelegt, von welcher der Beitrag eines Jeden in ein dazu bestimmtes Buch eingetragen wird. Jeder Theilnehmer hat darin sein besonderes Blatt (Folium), und über das Ganze wird genau Buch und Rechnung gehalten. Schuld und Forderung der Theilnehmer unter sich wird durch Ab- und Zuschreiben berichtigt; die Bank bezahlt jedoch auch baar, wenn es verlangt wird. Eine Girobank ist meistens nur für die Han-

delsleute der Stadt selbst von großem Vortheile. Die bedeutendsten Girobanken sind in Amsterdam und Hamburg.

Die Zettelbank wird ebenfalls dadurch gebildet, daß eine Gesellschaft eine Summe Geld hinterlegt. Sie hat ihren Namen davon, daß sie Zettel oder Scheine, welche Banknoten genannt werden, austheilt und in Umlauf setzt, für welche sie sich, laut ihrer Verfassung oder Einrichtung, verpflichtet, baares Geld zu geben. Diese Banknoten sind für den Handel von großem Vortheil. Die Scheine haben, wenn anders die Bank allgemeines Vertrauen besitzt, den Werth des baaren Geldes, und stehen selbst manchmal höher als baares Geld. Ist aber eine Bank nicht im Stande, ihre ausgestellten Noten baar zu bezahlen, so fallen diese unter ihren Nennwerth. Die berühmtesten Zettelbanken sind in London und Paris. Wenn sie von Privatleuten oder Kaufleuten gegründet werden, so heißen sie Privatzettelbanken; ist aber der Staat Eigenthümer einer solchen Bank, so heißt sie Staatszettelbank.

Das Grundkapital (der Fond) der Banken besteht großentheils in Barren (Stangen) von Silber oder Gold. Das Geld, welches in der Bank hinterlegt wird, besteht nur aus guten Sorten von feinem Gehalt und heißt Bankogeld (Bankgeld, argent de banque). Dieses hat einen festen unveränderlichen Werth, erleidet daher auch keinen Wechsel durch die Veränderung des Münzfußes und ist, da es wenig in Umlauf kommt, auch nicht so leicht einer Verringerung des Werthes durch Abnützung und Beschneidung unterworfen. Daher steht das Bankogeld gemeiniglich einige Procent höher, als das im täglichen Verkehr umlaufende (kurante) Geld; doch ist es durch besondere Umstände schon dahin gekommen, daß das Kurantgeld einige Procent über den Werth des Bankogeldes stieg.

2) Die Art, wie die Münzen nach ihren höheren und niederen Sorten in einem gewissen Verhältnisse zu einander eingetheilt, benannt und berechnet werden, heißt Währung.

Die bekanntesten Währungen sind:

1) Die süddeutsche: der Gulden zu 60 Kreuzer à 4 Pfennige.
2) Die preußische: der Thaler zu 30 Silbergroschen à 12 Pfennige.
3) Die sächsische, der Thaler zu 30 Neugroschen à 10 Pfennige.
4) Die lübische: nach Mark zu 16 Schilling à 12 Pfennig. Der Thaler wird zu 3 Mark oder 48 Schilling lübisch gerechnet.
5) Die niederländische: nach Gulden à 100 Cents. Der holländische Gulden soll 10 Gramm wiegen und $\frac{945}{1000}$ fein

sein, so daß sehr nahe an $24\frac{3}{4}$ holl. Gulden auf die Vereinsmark gehen.

6) Die französische: nach Franken zu 100 Centimes.

7) Die englische: nach Pfunden Sterling à 20 Schilling à 12 Pence. Dieses Pfund besteht seit 1816 in einer Goldmünze, Sovereign genannt; vorher war es nur eine Rechnungsmünze, da die bis dahin übliche Guinea nicht 20, sondern 21 Schilling galt.

Die Münzeinheit in England besteht also aus Gold, im übrigen Europa aber meist in Silber. Da aber der Werth des einen dieser Metalle im andern selten fest steht; so kann auch der Werth eines Pfundes Sterling in Silbergeld nicht immer bestimmt angegeben werden. Es wiegen gesetzlich 1869 Sovereigns 40 Pfd. Troy à 372,246 Gramm, und die Feinheit wird zu $^{11}/_{12}$ angegeben; demnach ist der Werth eines Pfundes Sterlings (oder eines Sovereigns) in Süddeutschland 12 fl. 3 kr. in Gulden Gold.

8) Die oberitalienische: nach Lire austriche zu 100 Centesimi oder Lire zu 20 Soldi austriachi à 5 Centesimi.

Die Lira austriaca in Mailand ist gleich einem Zwanzigkreuzerstück Konventionsgeld, und 1 Kzr. = 5 Centesimi.

9) Die russische: nach Rubeln zu 100 Kopeken.

Man kann 13 Silberrubel (Silberrubel, im Gegensatz von Papierrubeln, deren 7 = 2 Silberrubeln im Werthe sind) auf die feine Vereinsmark rechnen, wornach 1 Rubel = $32^4/_{13}$ Silbergroschen = $92^4/_{13}$ Kreuzer Konv.-Münze (östreichisch) = $113^1/_3$ Kzr. im $24^1/_2$-Guldenfuße.

Anm. Ausführliche Auskunft über Münzen, Maße und Gewichte, Wechsel-, Geld- und Fondskurse u. s. w. findet man in Nelkenbrecher's allgemeinem Taschenbuche. 17. Aufl. Berlin bei Reimer. 1848.

3) Der Werth, den eine Zahlungs- oder Rechnungsmünze hat, heißt Zahlwerth, Zahlungswerth, Valuta.

Das Gewicht des reinen Goldes oder Silbers, welches in einer Münze enthalten ist, nennt man den Feingehalt einer Münze oder das Korn (le titre); das Brutto-Gewicht einer Münze, nämlich das des Goldes oder Silbers mit dem Zusatze, heißt das Schrot (poids). §. 30, a. Anmk.

Die gesetzliche Verordnung eines Staates, wie die auszuprägenden Münzen an Schrot und Korn beschaffen sein müssen, und wie viele Stücke von einem bestimmten Gewichte und

Werthe aus einer feinen Mark geprägt werden sollen, nennt man den Münzfuß.

Die in Deutschland am häufigsten vorkommenden Münzfüße in Silber sind:

1) Der Konventions-Münzfuß, oder der Münzfuß des süddeutschen Münzvereins, oder der $24\frac{1}{2}$-Guldenfuß, nach welchem in Baden, Würtemberg, Baiern, Hessen u. s. w. die kölnische Mark fein Silber (233,855 Gramm) zu $24\frac{1}{2}$ fl. ausgeprägt wird.

2) Der preußische Kurrentfuß, nach welchem die kölnische Mark fein Silber zu 14 preuß. Thalern ($24\frac{1}{2}$ fl.) ausgeprägt wird.

3) Der Konventionsfuß, Konventions-Kurentfuß oder 20-Guldenfuß, nach welchem in Oestreich aus der feinen köln. Mark 20 fl. à 60 Kzr. ausgemünzt werden.

4) Der lübische Kurentfuß, nach welchem Lübeck und Hamburg ausmünzen, die kölnische Mark fein Silber zu $11\frac{1}{3}$ Thlr. oder 34 Mark Kurent.

Anm. 1. Die Girobank in Hamburg hat eine fingierte Bankvaluta. Die Einlage in diese Bank muß in $15^2/_3$-löthigen Silberbarren geschehen. Die kölnische Mark fein Silber wird zu 27 Mark 10 Schillingen in Banko eingeschrieben, dagegen werden bei der Herausnahme von der Bank 27 Mark 12 Schillinge Banko berechnet oder abgeschrieben. Von dieser Bankvaluta gehen demnach, da 3 Mark = 1 Thlr., und 1 Mark = 16 Schillinge, $9^5/_{24}$ Thlr. Banko oder $27^5/_8$ Mark Banko auf 1 kölnische Mark. Hiernach sind 100 Mark Banko so viel werth als $123^{17}/_{221}$ Mark Kurant, und das Bankagio schwankt gewöhnlich zwischen 23 und 24 Procent.

Anm. 2. Nach den Untersuchungen von Cavendish und Hatschett ist das Mischungsverhältniß, in welchem Silber und Kupfer die für Silbermünzen am meisten sich eignende und härteste Masse gibt, ziemlich nahe wie 9:1, wornach die Masse, welche diesem Mischungsverhältnisse entspricht, $14^2/_5$-löthig ist. Aus solcher Masse werden in Frankreich und einigen andern Ländern, namentlich auch in den deutschen Zollvereinsstaaten (nach der am 30. Juli 1838 in Dresden abgeschlossenen Münzkonvention) die groben Silbermünzen und deren Theilstücke (Kurant-Münze) geprägt. Der Feingehalt unserer Gulden- und Halbguldenstücke ist also 14 Loth 7,2 Grän. Der Feingehalt unserer Gulden- und Halbguldenstücke ist also 14 Loth 7,2 Grän. Der Feingehalt unserer Groschen und Sechser ist 5 Loth 6 Grän.

Auch für Goldmünzen ist eine Mischung von 9 Gewichts-Einheiten

Gold mit 1 Gewichts-Einheit Kupfer am geeignetsten, wornach die Masse $21^3/_5$karatig wird. Aus solcher Masse werden in Frankreich, Belgien, zum Theil im Königreich der Niederlande, in den meisten italienischen Staaten und in mehreren andern Ländern Goldmünzen geprägt.

4) Weil das Verhältniß der Preise des ungemünzten Silbers zu den Preisen des ungemünzten Goldes veränderlich ist; so wird nur die Münze von einem der beiden Metalle als gesetzliches Zahlungsmittel gebraucht, und die Werthbestimmung der Münze des andern Metalles bleibt dem freien Verkehr überlassen. In den meisten Ländern hat man in obiger Beziehung das Silber, als das häufiger vorhandene und zur Vergütung kleiner Werthe dienlichere Metall, dem Golde vorgezogen.

Aus dem Preisverhältniß des Silbers und Goldes ergibt sich, wie viel Gewichtseinheiten Silber gleichwerthig mit einer Einheit Gold sind.

Anm. Vor der Entdeckung von Amerika galt das Gold ungefähr das 10- bis 12-fache des Silbers, im 13ten Jahrhundert bis zur Mitte des 16ten im Durchschnitt das $10^1/_2$fache. Seit dem Einströmen der amerikanischen Metallmassen stieg es anfangs auf das 15fache, fiel dann im 18ten Jahrhundert wegen der reichen Goldausbeute Brasiliens auf das 14fache, bis es später wieder etwas stieg. Jetzt steht es zwischen dem 15- und 16fachen, ist aber im Fallen begriffen, wegen der reichen Goldausbeute in Californien.

Durch die gesetzliche Feststellung des preußischen Friedrichsd'or auf $5^2/_3$ Thlr. Kurant oder 100 Thlr. Gold zu $113^1/_3$ Thlr. Kurant ist eine Mark fein Gold in Friedrichsd'or = 219,692308 Thlr. Kurant, also das Verhältniß zwischen Gold und Silber wie 219,692308 zu 14 Thlr., oder wie 15,6923 : 1, welches als ein jetzt in Preußen feststehendes angesehen werden kann. Von den Friedrichsd'or gehen 38,769231 Stück ($38^{10}/_{13}$) oder 193,846154 Goldthaler ($193^{11}/_{13}$) auf eine kölnische Mark fein Gold.

In Frankreich kursiren die Zwanzig- und Vierzig-Frankenstücke im gewöhnlichen Verkehr zu ihrem Nennwerthe, und stehen nur in größeren Mengen höher, weil der auf der Goldmünze bezeichnete Werth dem Werthe, welcher den gewöhnlichen Gold- und Silberpreisen entsprechend ist, sehr nahe kommt.

Gold al Marco heißt: eingeschmolzenes feines Dukatengold, also $23^1/_2$karatiges Gold.

Beantwortung der Aufgaben.

a. Gehalt der Münzen.

1)

x	1 Thlr.
$\frac{21}{2}$	1 Mark
1	16 Loth
1	18 Grän

x = $27\frac{3}{7}$ Grän

2)

x	1 Sovereigns
1869	40 Pfd.
1	12 Ounces
1	20 Pennyweights
1	24 Grains.

x = $123\frac{171}{623}$ Grains.

3)

x	1 Fünffrankenthlr.
1	25 Gramm
125	8 Loth

x = $1\frac{3}{5}$ Loth.

4)

x	1 Frk.
$222\frac{2}{9}$	1000 Gramm

x = $4\frac{1}{2}$ Gramm.

5) $28\frac{4}{5}$ Grän. 6) $1\frac{1}{3}$ Mark 12löthiges Silber.

7)

x	16 Theile
5	4,5 Theile fein.

x = $14\frac{2}{5}$ löthig.

8) Nach den Münzgesetzen vom 14. Juli 1750, 29. März 1764 und 30. September 1821 sind die preußischen Thaler 12löthig; nach der Münzkonvention vom 30. Juli 1838 sind die Zweithalerstücke (Vereinsmünzen) von 1839 an gesetzmäßig $14\frac{2}{5}$ löthig.

x	12 Loth fein Silber.
16	14 Stück.

x = $10\frac{1}{2}$ Stück.

9) 40 Stück. 10) 14 Stück. 11) Ein preußischer Friedrichsd'or wiegt $8\frac{8}{35}$ Grän, hat $7\frac{3}{7}$ Grän Korn, auf die rauhe Mark gehen 35, und auf die feine Mark $38\frac{10}{13}$ Stück. Das Gold ist 21 Karat 8 Grän fein. 12)

x	900 Gramm
233,855	24,5 fl.

x = 94,28 . . . fl.

13) 9,25 . . . Stück. 14) 23,27 . . . . Stück. 15) $222\frac{2}{9}$ Franken.

16)

x	1 Kr.
9,084	24,5 fl.

x = 2 fl. 41 Kzr. 3,3 Pf.

17) Zusatz = $\frac{1}{2}$ Frk.; das gesetzliche Mischungsverhältniß = $\frac{4\frac{1}{2}}{5}$ = $\frac{9}{10}$ = $\frac{14\frac{2}{5}}{16}$. 18) $\frac{7\frac{3}{7}}{8\frac{8}{35}}$ = $\frac{65}{72}$ = $\frac{21\frac{2}{3}}{24}$.

19) Wenn das Korn $\frac{9}{10} - \frac{3}{1000} = \frac{897}{1000}$ ist, so ist das Geldstück noch umlaufsfähig.

20)

Stück Franken.	Gesetzliches Gewicht.	Remedium.	Gewicht nach dem Remedium in Plus oder aufsteigend.	Gewicht nach dem Remedium in Minus oder absteigend.
5	25	$\frac{3}{1000}$	25,075	24,925
2	10	$\frac{5}{1000}$	10,05	9,95
1	5	$\frac{5}{1000}$	5,025	4,975
½	2,50	7	2,5175	2,4825
¼	1,25	10	1,2625	1,2375

21) 0,8583 . . . 22) $1\frac{41}{59}$ % Schlagschatz. 23) $2\frac{2}{9}$ Frank.

24)

x	288 Grän fein Silber.
64	$106\frac{2}{3}$ Sgr.
30	1 Thlr.

a. x = 16 Thalerfuß.

b. 480 Sgr.

25) a.

x	30 Sgr.
$106\frac{2}{3}$	64 Grän f. Silber.

x = 18 Grän = 1 Loth.

b.

x′	1 Thlr.
14	16 Loth fein S.

x′ = $1\frac{1}{7}$ Loth.

c.

x″	100 Loth fein S.
$1\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$ Loth Verlust.

x″ = $12\frac{1}{2}$ %

d.

x‴	100 Thlr. in Thlrst.
14	16 Thlr. in Sgr.

x‴ = $114\frac{2}{7}$ Thlr. in Sgr.

26)

x	1 Ztnr.
1	110 Pfd.
1	32 Loth.
1	4 Quentchen.
5	12 Pfennige.
12	1 Sgr.
30	1 Thlr.

x = $93\frac{13}{15}$ Thlr.

27) a.

x	1 Mark Kupfer.
2	1 ℔
110	$93\frac{13}{15}$ Thlr.
1	30 Sgr.

x = $12\frac{4}{5}$ Sgr.

b.

x′	1 Mark Silber.
1	14 Thlr.
1	30 Sgr.
1	12 Pfennige.
12	5 Quentchen Kpfr.
4	1 Loth Kpfr.
32	1 ℔ Kpfr.
1	2 Mark Kupfer.

x′ = $32\frac{13}{16}$ Mark Kupfer.

28)

x	24 Karat Misch.
10	9 Karat fein Gold.

x = $21\frac{3}{5}$ Karat.

29) Der Schlagschatz beträgt 0,19 . . %

30) a.

x	1 Friedrichsd'or
35	$21\frac{2}{3}$ Karat
24	213 pr. Thlr.

x = 5 Thlr. $14\frac{23}{28}$ Sgr.

b. Wird die Mark fein Gold zu 219,692308 Thlr. Kurant gerechnet; so ist 1 Friedrichsd'or = $5\frac{2}{3}$ Thlr. Kurant.

31) Von den preußischen Thalern wiegen $10\frac{1}{2}$ Stück eine rauhe Mark.

x	1 Thlr. rauh.
$10\frac{1}{2}$	$11\frac{5}{6}$ Loth fein
16	$13\frac{5}{6}$ Thlr.
1	30 Sgr.

x = 29 Sgr. 2,77 . . Pf., woraus sich ein Prägeschatz von ca. $2\frac{5}{8}$ % ergibt.

b. Gegenseitiger Werth der Münzen.

1) Die preußischen Thaler, von denen $10\frac{1}{2}$ Stück eine rauhe Mark wiegen, sind 12löthig.

x	1 Sgr.
30	1 Thlr.
$10\frac{1}{2}$	12 Loth Silber
16	24,5 fl.
1	60 Kzr.

x = 3,5 Kzr.

2) $\frac{4}{7}$ Thlr. 3) a. 900 Gramm. b. 3100 Franken.

c.

x	1000 Gramm fein Gold
900	3100 Franken.

x = $3444\frac{4}{9}$ Fr.

d. Aus 1000 Gramm Silber werden $222\frac{2}{9}$ Frk. in Silber, aus 1000 Gramm Gold $3444\frac{4}{9}$ Franken in Gold geprägt. Das Verhältniß des Silbers zum Golde ist hiernach

$222\frac{2}{9} : 3444\frac{4}{9}$ oder $1 : 15\frac{1}{2}$.

4)

x	1 Mark fein Gold
1	24 Karat fein Gold
$21\frac{25}{48}$	36,655 Zwanzigfrankenstücke
1	20 Franken
5	1 Fünffrankenstück
9,365	$14\frac{1}{3}$ Loth fein Silber
16	1 Mark fein Silber.

x = 15,64 . . Mark fein Silber.

5)

x	1 fl. östr.
20	1 Mark Silber
1	233,855 Gramm
$\frac{9}{2}$	1 Frank

1 fl. = 2,59838 ... Franken.

6)

x	1 Mark fein Gold.
1	38,7692 Friedrichsd'or
1	$5\frac{2}{3}$ Thlr. Kurant.
14	1 Mark fein Silber.

x = 15,69 Mark Silber.

7) a) 1 fl. unseres Geldes = 48,979 ... Kzr. in Oesterreich. b) 1 fl. im 20-Guldenfuß = 1 fl. 12 Kzr. im 24-Guldenfuß = 1 fl. $13\frac{1}{2}$ Kzr. im $24\frac{1}{2}$-Guldenfuß.

8)

x	100 fl. im $24\frac{1}{2}$-Guldenfuß
24,5	20 fl. im 20-Guldenfuß.

x = $81\frac{31}{49}$ fl.

9)

x	1 Silberrubel.
100	$5\frac{1}{16}$ ℔ russ. Mischung
96	$83\frac{1}{3}$ ℔ fein Silber
1	409,5174 Gramm Silber
233,855	1 Mark kölnisch Silber.
1	$24\frac{5}{12}$ fl.

x = 1 fl. 12,73 ... Kzr.

10)

x	1 Sovereign
$46\frac{29}{40}$	1 ℔ Standard
12	11 ℔ fein
1	373,246 Gramm fein
233,85	24 Karat
$21\frac{2}{3}$	35 Friedrichsd'or
1	$5\frac{2}{3}$ Thlr.

x = 6 Thlr. 26 Sgr. 4 Pf.

11)

x	1 Pagode
1	184 Cents.
100	27,089 Gramm rauh
1000	896 Gramm fein
$4\frac{1}{2}$	1 Frank.

x = 9,92 ... Fr.

12)

x	1 Rupie
1	165 Grän fein
5760	373,246 Gramm
1000	104,75 fl. holländisch.

x = 1 fl. 12 Cents.

c. Agio-Berechnungen.

1)

x	1 Friedrichsd'or
20	$113\frac{1}{3}$ Thlr. Kurant.

x = $5\frac{2}{3}$ Thlr. Kurant.

2) a. 1 Friedrichsd'or = 5 Thlr. in Gold = 8 fl. 45 Kzr.; also beträgt das Agio für jedes Stück 1 fl. $10\frac{1}{2}$ Kzr.

b.

x	30 Friedrichsd'or
1	$\frac{47}{40}$ fl. Agio.
7	4 Thlr.

x = $13\frac{3}{7}$ Thlr.

3)

x	20 Pistol.
1	$\frac{1187}{120}$ fl.
7	4 Thlr.

x = $113\frac{1}{21}$ Thlr.

4) $15\frac{1}{4}$ Sgr. 5) $2266\frac{2}{3}$ Thlr. Kurant. 6) $238\frac{4}{17}$ Fr. 7) 180 Fr. 8) 6 Thlr. Agio. 9) $290\frac{170}{227}$ Pistolen = 290 Pistolen 4 Thlr. $7\frac{1}{2}$ Sgr. Kurant. Der Bruch $\frac{170}{227}$ muß in preuß. Kurant ausbezahlt werden.

10) 3 Thlr. 4 Sgr. $3\frac{3}{40}$ Pf. 11) $13\frac{3}{4}$ Sgr.

12)

x	$36\frac{4}{11}$ Duk.
1	15 Sgr. Agio.
30	1 Thlr.

x = $18\frac{2}{11}$ Thlr. Agio.
oder $18\frac{2}{11}$ %.

13) 76 Thlr. Kurant.

14) 2320 Thlr. Kurant. 15) Im 20-Guldenfuße ist 1 Duk. = 4 fl. $39\frac{9}{20}$ Kzr.

16)

x	100 fl. in Gold
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{41}{60}$ fl. Kurant.

x = $104\frac{2}{27}$ fl.

17)

x	500 Duk.
$36\frac{4}{11}$	$114\frac{1}{2}$ Thlr. Kur.
$108\frac{1}{2}$	20 Pistolen.

x = $290\frac{45}{217}$ Pistolen.

18)

x	100 Thlr. Gold
$2\frac{3}{4}$	$5\frac{2}{3}$ fl. Kurant
7	4 Thlr. „

x = $117\frac{173}{231}$ Thlr. Kurant.

§. 39.

Wechselrechnungen.

1) Das Wechselgeschäft ist dasjenige Geschäft, durch welches man Gelder an einem entfernten Orte einzieht oder auszahlt, oder auf seinem Platze empfängt, um sie an einem andern Orte auszuzahlen oder auszahlen zu lassen. Es ist also das Geschäft, durch welches Schuld und Gegenschuld zwischen entfernten Orten

ausgetauscht werden. Dieses Einziehen und Auszahlen, dieser Austausch, geschieht mittelst der Wechsel, wodurch die Kosten und die Gefahr vermieden werden, welchem die unmittelbaren Geldsendungen unterworfen sind.

Anm. Das Hingeben einer Sache für eine andere, wird durch die Wörter: tauschen, kaufen, wechseln bezeichnet, jedoch mit dem Unterschiede, daß tauschen bei Waare gegen Waare, kaufen bei Waare gegen Geld, wechseln aber bei Geld gegen Geld gebräuchlich ist. So sagt man Goldmünzen gegen Silbermünzen ein= oder auswechseln. Deßwegen heißen Berechnungen verschiedener Münzsorten gegeneinander Wechselrechnungen.

2) Der Wechselhandel wird gewöhnlich eingetheilt:

a. in den einheimischen Wechselhandel (le change interieur), bei welchem die Wechselbriefe auf's Inland gestellt sind, und der Wechselpreis (Kurs) bloß nach Prozenten bestimmt wird, wie z. B. von Frankfurt auf Augsburg, von Paris nach Lyon u. s. w. und umgekehrt;

b. in den Wechselhandel mit auswärtigen Plätzen (le change exterieur), welcher darin besteht, daß der Wechsel auf auswärtige Plätze in fremder Geldeswährung gezogen ist, und man den Kurs oder das Verhältniß der fremden Münze in die einheimische zu berechnen hat, z. B. von Frankfurt auf Paris.

3) Im Wechselhandel sind 2 Punkte in Betracht zu ziehen: 1) der Uebertrag des Geldes; 2) der Preis dieses Uebertrages.

Der Uebertrag wird durch einen Wechselbrief bewirkt, der die Gelder vorstellt, welche überlassen oder abgetreten werden sollen. Der Gläubiger gibt darin seinem Schuldner, der an einem andern Orte als demjenigen der Ausstellung wohnt, den Auftrag, zu einer gewissen Zeit an eine darin angegebene Person, oder deren Ordre (deren Anweisung), eine gewisse Summe Geldes, deren Werth der Aussteller als empfangen anerkennt, nach Wechselrecht auszuzahlen. In einem solchen Wechsel kommen also wenigstens drei Personen vor: a. der Aussteller oder Trassant (le tireur), welcher den Wechsel auf einen Dritten ausstellt; b. der Bezogene oder Trassat (le tiré), welchem der Aussteller den Auftrag zur Zahlung gibt, und der, sobald er sich schriftlich auf dem Wechsel zur Zahlung erklärt, Annehmer oder Acceptant (accepteur) wird; c. der Neh=

mer (le preneur) des Wechsels oder Derjenige, zu dessen Gunsten (an dessen Ordre) der Wechsel ausgestellt ist. Der Nehmer kann den Betrag davon selbst erheben oder erheben lassen. Im erstern Falle wird er auch Präsentant oder Vorzeiger (porteur). Ueberträgt aber der Nehmer sein Eigenthumsrecht auf den Wechsel einem Andern; so wird er durch den Uebertrag (das Indossement oder Endossement), der auf der Rückseite des Wechsels geschieht, Indossant (endosseur), der Andere aber Indossat (endossé), in welchem Falle alsdann 4 Personen vorkommen. Es können selbst noch mehrere vorkommen, wenn der Wechsel noch weiter übertragen wird, bis er endlich zum letzten Inhaber, dem Präsentanten (dernier porteur) gelangt, der den Betrag des Wechsels einzieht.

Ein Wechsel also, der die hier angeführten Erfordernisse hat, wird in Betreff Desjenigen, der ihn als Aussteller unterzeichnet, Tratte (traite) genannt, hingegen Rimesse (remise) in Betracht des Nehmers, der den Werth dafür gibt und Remittent ist, sobald er ihn einem Korrespondenten (einem Geschäftsfreunde) zum Einziehen oder zum Verkaufen übermacht. Trassieren (tire, faire traite) heißt also mittelst einer Tratte einer dritten in einem andern Orte wohnhaften Person einen Auftrag zum Bezahlen einer gewissen Summe geben; remittieren (remettre) heißt dagegen den Auftrag geben, die Zahlung in Empfang zu nehmen. In der Wechselrechnung selbst versteht man auch unter trassieren verkaufen, und unter remittieren einkaufen.

4) Der Preis des Uebertrages gibt an, wie viel eine Summe Geldes von einem Platze in dem Gelde des andern Platzes kostet. Diesen Preis nennt man den Wechselkurs, Kurs (change, prix du change). Der Wechselkurs unterscheidet sich vom Geldkurs darin, daß beim Wechselkurs die beiden verglichenen Geldarten an zwei verschiedenen Orten zahlbar sind, der Geldkurs dagegen nur den Preis einer Geldsorte an einem und demselben Orte angibt.

5) Der Wechselhandel wird vom Bankier (Wechsler, Banquier) sowol für eigene als für fremde Rechnung (in Kommission) getrieben. Ersterer besteht im Diskontieren, so wie im Ein- und Verkauf von Wechseln, um sie entweder wieder auf dem

Platze selbst, oder auf andern Plätzen umzusetzen und sich im letzteren Falle dafür den Ersatz geben zu lassen, oder auf eine andere Weise über den Betrag zu verfügen, je nachdem sich ihm eine Gelegenheit dazu darbietet. Der Wechselhandel in Kommission wird im Auftrage und für Rechnung eines Dritten getrieben.

Anm. Wenn der Platz, auf welchem der Kurs verzeichnet wird, die veränderliche Valuta gibt, so ist ein hoher Kurs vortheilhaft zum Trassieren, und schädlich zum Remittieren; hingegen ist ein niederer Kurs schädlich zum Trassieren und nützlich zum Remittieren.

6) Die Wechselrechnung begreift alle Fälle im Wechselgeschäft, in welchen der Werth einer Wechselsumme im Verhältnisse ihres Kurses zu berechnen ist, die Art und Weise, wie mit Nutzen trassiert oder remittiert werden kann, wie ein Kurs sich stellen muß, um mit Nutzen zu operieren, wie Gewinn oder Verlust ausgemittelt werden u. s. w.; kurz alle Rechnungsaufgaben, welche sich auf Wechsel und deren Kurse beziehen.

Anm. Manche, welche Geschäfte unternehmen, die ihre Geldkräfte bedeutend übersteigen, suchen sich dadurch Geld zu verschaffen, daß sie auf lange Sicht trassieren und gegen die Verfallzeit hin wieder remittieren, oder auf sich oder einen Andern trassieren lassen. Solche Operationen werden Wechselreiterei genannt. Sie untergraben den Kredit und sind höchst kostspielig, weil der Geschäftsmann dadurch in die Lage kommt, Wechselspesen bezahlen und sich jedem Kurse unterwerfen zu müssen.

Beantwortung der Aufgaben.

a.

1)

x	100 fl. holl.
1216	1225 fl. im $24\frac{1}{2}$-Guldenfuß.

$x = 100\frac{900}{1216}$ fl. ($44\frac{31}{76}$ Kzr.) im $24\frac{1}{2}$-Guldenfuß.

2)

x	60 Thlr.
14	24,5 fl.

$x = 105$ fl.

3)

x	200 Frank.
1	4,5 Gramm.
233,855	$24\frac{1}{2}$ fl.

$x = 94\frac{13526}{46771}$ fl.

4)

x	150 fl. östr.
20	14 Thlr.

x = 105 Thlr.

5)

x	1 Silberrubel
1	405 Doli f. Slbr.
96	1 Solotnik
96	1 ℔ russisch
1	409,516 Gramm
233,855	$27\frac{5}{8}$ Mark Banko.
1	16 Schill.

x = 34,104 . . . Schilling.

6) 150 fl. im 20-Guldenfuß werden in Berlin mit $103\frac{3}{4}$ Thlr. pr. Kurant bezahlt.

60 Tage — 23 Tage = 37 Tage.

fl.	Tage	fl. Zins.
100	360	4
$103\frac{3}{4}$	37	x

x = 0,426 . . fl. Zins.

Diese vom Kurse gekürzt (103,75—0,426) geben 103,324 oder annähernd $103\frac{1}{3}$ fl.

b.

1)

x	$250\frac{1}{2}$ Pfd. Sterl.
10	121 fl.

x = $3031\frac{1}{20}$ fl.

2)

x	1000 fl.
$94\frac{7}{8}$	200 Fr.

x = $2108\frac{28}{759}$ Fr.

3)

x	60 pr. Thlr.
240	420 fl.

x = 105 fl.

4)

x	1500 fl. in Augsb.
100	120 fl. in Frkft.

x = 1800 fl.

5)

x	20000 Piaster
1	40 Para
480	1 fl. Konv. in Wien.
100	$100\frac{1}{8}$ fl. in Frkft.

x = $1668\frac{3}{4}$ fl.

6)

x	2000 fl.
$88\frac{1}{8}$	100 M. Banko.
100	$100\frac{1}{2}$ M. mit Spesen.

x = $2280\frac{40}{47}$ M.

c. Arbitragerechnungen.

1) a. Ueber Hamburg.

x	2000 Silberrbl.
1	35 Schilling
16	1 Mark Banko
200	145 fl. in Wien.

x = $3171\frac{7}{8}$ fl.

b. Ueber London.

x′	2000 Silberrubl.
1	39 Pence
12	1 Schill.
20	1 Pfd. Sterl.
1	$10\frac{1}{5}$ fl. in Wien.

x′ = 3315 fl.

Da demnach zur Zahlung der 2000 Silberrubel über Hamburg am wenigsten Wiener Gulden erforderlich sind, so ist dieser Weg am vortheilhaftesten, Zahlungen nach Rußland zu machen. Hingegen wäre es am vortheilhaftesten, über London Gelder aus Rußland zu beziehen, weil man über diesen Platz für die zu beziehende Summe Rubel eine größere Anzahl Wiener Gulden erhalten würde.

Anm. In dieser Arbitrage sind die Kurse von solchen Wechseln zu verstehen, welche gleiche Verfallzeiten haben; ist dies nicht der Fall, so muß der laufende Diskonto dabei in Anschlag gebracht werden.

2) 12000 Frk. à $93\frac{3}{4}$ = 5625 fl.
" " à $93\frac{1}{8}$ = 5587 fl. 30 Kzr.

Will Frankfurt Wechsel, die erst nach 2 Monaten zahlfällig, remittieren; so muß es so viel schicken, daß 12000 Franken übrig bleiben, nachdem der Diskonto abgezogen ist. Zu $3\frac{1}{2}$ % beträgt der Diskonto auf 2 Monate $\frac{7}{12}$ %; also

x	12000 Fr. baar
$99\frac{5}{12}$	100 Fr. in 2 Mon.

x = 12070 Fr. 40 Cent.

Hierbei sind jedoch die Tage außer Rechnung gelassen, welche die Rimesse unterwegs sein würde. Wenn nun Frankfurt diese 12070 Frk. 40 Cent. à 93 $\frac{1}{8}$ kauft; so bezahlt es 5620,28 fl. = 5620 fl. 17 Kzr.; also 4 fl. 43 Kzr. weniger, als wenn es kurzes Papier (Wechsel in kurzer Sicht) kauft.

3)

x	200 Fr.
212	100 fl.

x = 94 fl. $20\frac{20}{53}$ Kzr.

Aus dieser Berechnung ergibt sich, daß Frankfurt, wenn es auf Paris zieht, für je 200 Frk. $94\frac{7}{8}$ fl., bei Rimessen aber nur $94\frac{18}{53}$ fl. in Rechnung erhält, also Einiges gewinnt, wenn es sich Rimessen machen läßt.

4) a. In Paris werden für 100 fl. holl. 209,75 Franken bezahlt. Zur Vergleichung mit diesem direkten Kurse berechne man vermittelst der gegebenen Kursverhältnisse, auf wie viele Franken 100 fl. holl. zu stehen kommen.

1) London

x	100 fl. holl.
12	1 Liv. Sterl.
1	24 Frank.

x = 208,33 Fr.

2) Hamburg

x′	100 fl. holl.
36	40 M. Banko
100	188 Frank.

x′ = 208,88 Fr.

3) Berlin

x''	100 fl. holl.
250	140 Thlr.
1	375 Cent.
100	1 Fr.

$x'' = 210$ Fr.

4) Frankfurt

x'''	100 fl. holl.
100	98 fl.
100	213 Fr.

$x''' = 208{,}74$ Fr.

5) Wien

x^{IV}	100 fl. holl.
250	130 Thlr.
1	$1\frac{1}{2}$ fl.
100	258 Fr.

$x^{IV} = 208{,}98$ Fr.

6) Augsburg.

x^{V}	100 fl. holl.
100	82 fl. im 20fl.-Fuß
100	257 Fr.

$x^{V} = 210{,}74$ Fr.

Wenn also Paris nach Amsterdam zu remittieren hat; so ist, abgesehen von den Spesen, der Kurs über London (208,33) der günstigste, weil er der kleinste ist.

Werden $\frac{1}{2}$ Procent Spesen gerechnet, so erhält man

x	208,33 Fr.
100	$100\frac{1}{2}$ Fr.

$x = 209{,}37$ Franken.

Weil nun der direkte Kurs (209,75) größer ist, und noch um ungefähr $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$ % durch die zu vergütende Kurtage größer wird, wenn man sich beim Einkaufe des Wechsels der Vermittlung eines Sensals bedient; so ist die Rimesse über London vortheilhafter als die direkte.

Paris kann also so viel Liv. Sterl. in Londoner Wechseln nach London übermachen, als es zum Einkaufe von Amsterdamer Wechseln verwenden will, wornach London das durch Einkassierung der ihm übermachten Wechsel empfangene Geld nach Abzug der für Provision und Nebenauslagen ihm zukommenden Vergütung zu diesem Zwecke verausgabt. Beim Eintreffen der Ordre in London kann sich indessen der Kurs auf Amsterdam geändert haben, und Paris muß deßhalb aus dem bisherigen Stande des Kurses und aus allen zu seiner Kunde gelangten Handelsverhältnissen, welche auf den Wechselkurs Einfluß üben, erwägen, ob es wahrscheinlich sei, daß die bei der Arbitrage als günstig sich herausstellenden Kurse sich bis zur Ausführung der beabsichtigten Wechseloperation auch halten werden.

b. Wenn dagegen Paris in Amsterdam Geld zu erheben hat; so ist, abgesehen von den Spesen, der Kurs über Augsburg (210,74) der günstigste, weil er der höchste ist.

Werden $\frac{1}{2}$ % Spesen gerechnet, so erhält man

x	210,74 Fr.
100	$99\frac{1}{2}$ Fr.

x = 209,6863 Fr.

Dieser Kurs ist etwas niedriger als der direkte. Letzterer wird aber auch noch ungefähr $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$ % durch die zu vergütende Kurtage kleiner, wenn beim Verkaufe des auf Amsterdam gezogenen Wechsels die Vermittlung eines Sensals gebraucht wird. Rechnet man $\frac{1}{10}$ % Kurtage, so erhält man

x	209,75 Fr.
100	$99\frac{9}{10}$ Fr.

x = 209,54025 Fr.

Mithin wäre es für Paris (wenn auch nur wenig) vortheilhafter, über Augsburg zu wechseln, als direkt zu ziehen. Paris kann also Augsburg (einem Augsburger Hause) den Auftrag ertheilen, so viel fl. holl. als es in Amsterdam zu erheben hat, für seine (des Auftraggebers) Rechnung zu ziehen und gleichzeitig auf den Auftragbesorger so viel fl. ziehen, als er durch den Verkauf des auf Amsterdam gezogenen Wechsels für seine Rechnung erhalten wird.

5) a. Ziehung von Paris auf Frankfurt.

x	200 Fr.
213	100 fl.

x = 93,89 . . . fl.

b. Rimesse über Hamburg.

x′	200 Fr.
$186\frac{1}{2}$	100 M. Banko
100	88 fl.
100	$100\frac{1}{2}$ fl. wegen Spesen.

x′ = 94,84 fl.

c. Rimesse nach Paris mit Augsburger Papier.

x″	200 Fr.
255	100 fl. im 20=Guldenfuß
100	120 fl. im $24\frac{1}{2}$=Guldenfuß
100	$100\frac{1}{2}$ fl. wegen Spesen

x″ = 94,58 fl.

Die berechneten Kurse sind größer als der Kurs des Pariser

Papiers in Frankfurt; mithin ist die direkte Rimesse am vortheilhaftesten.

6)

x	1000 Duk.
1	$2\frac{3}{4}$ Thlr. Gold
100	112 Thlr. mit Agio
145	300 Mark Banko
100	99 Mark Banko wegen Kurtage

$x = 6308\frac{20}{29}$ Mark.

Der Gewinn ist also = 58 Mark 11 Schill. $\frac{17}{19}$ Pf.; da 1000 Duk. à $6\frac{3}{4}$ Mark = 6250 Mark sind.

d. Wechselkommissions-Rechnungen.

Wechselkommissions-Rechnungen finden statt, wenn, nachdem der Kommissionär den Auftrag zum Verkauf und Einkauf gewisser Wechselgattungen erhalten, der Fall eingetreten ist, daß sich entweder nur der eine, oder gar beide Kurse verändert haben. Wenn z. B. in einem höhern Kurse, als die Ordre lautet, remittiert werden müßte, so bliebe zu berechnen, in welchem Kurse man trassieren müßte, damit der Verlust sich ausgleiche; eben so im umgekehrten Falle. Die Kommission ist unausführbar, wenn beide Kurse sich zum Nachtheil verändert haben, und die Berechnung ist unnöthig, wenn die doppelte Kursveränderung zum Vortheil gereicht.

1)

x	36 fl. holl.
35	148 Thlr.

$x = 152\frac{8}{35}$ Thlr.

2)

x	38,5 Pence
39	11,95 fl.

$$x = \frac{11,95\ \ 39}{38,5} = 12,10 \text{ fl.}$$

Er muß also steigen um 0,15. Ist letzterer Kurs in der Wirklichkeit nicht so hoch gestiegen, so kann der Auftrag nicht ausgeführt werden.

3)

x	$13\frac{5}{16}$ M. B.
$13\frac{1}{8}$	$152\frac{1}{2}$ Thlr.

$$x = \frac{13\frac{1}{8} \times 152\frac{1}{2}}{13\frac{5}{16}} = 150\frac{25}{71} \text{ Thlr.}$$

4)

x	$13\frac{11}{16}$ M.
$13\frac{1}{2}$	150 Thlr.

$$x = \frac{13\frac{1}{2} \cdot 150}{13\frac{11}{16}} = 147\frac{69}{73} \text{ Thlr.}$$

147 Thlr. 28 Sgr. $4\frac{20}{73}$ Pf. ist der erforderliche Kurs der Rimesse. Da nun 148 etwas höher ist, so kann die Kommission in den gefundenen Kursen noch mit Vortheil geschehen.

5)

x	207 Fr.
209	186 Fr.

$x = 187\frac{53}{69}$.

Paris muß also zu $187\frac{53}{69}$ Frkn. auf Hamburg trassieren.

6)

x	$77\frac{5}{8}$ Thlr.
$76\frac{2}{3}$	105 Thlr.

$x = 103,7$ Thlr.

Der Auftrag kann vollzogen werden, da Schaden und Nutzen gleich sind.

§. 40.

Vermischte Aufgaben.

1) Unausgesetzt 9512 Jahre 342 Tage 5 Stdn. 20 Min. (1 Jahr = 365 Tage).

2) Die absolute Majorität ist vorhanden, sobald Jemand 1 Stimme mehr als die Hälfte von 330 hat; es reichen mithin zur absoluten Majorität 166 Stimmen hin. Schreibt jede Person 8 Namen auf, so werden $8 \times 330 = 2640$ Namen aufgeschrieben. $2640 : 166 = 15$ mit dem Reste 150. Es können also 15 die absolute Majorität erhalten, wenn auch 150 Stimmen sich vereinzeln.

Anm. Wäre zur absoluten Majorität nur die Hälfte der Stimmen erforderlich; so könnte gerade die doppelte Anzahl der aufgeschriebenen Namen, also wenn 8 aufgeschrieben werden, 16 die absolute Majorität erhalten. Nun muß aber Jeder wenigstens 1 Stimme mehr als die Hälfte haben, folglich muß wenigstens eine der 16 Personen ausfallen, damit jede der Uebrigen mehr als die Hälfte der Stimmen erhalte.

3)

x	25 Sgr.
100	8 M.
12	12 Sgr. Zins

$x = 2$ Sgr.

4) a. $\frac{3}{4}$ der Einkaufsumme $= 52\frac{1}{2}$ Thlr., also war die Einkaufsumme $= 70$ Thlr. und 1 Pfd. im Einkauf $= \frac{70}{42} = 1\frac{2}{3}$ Thlr.

b. 1 Pfd. im Verkauf $= \dfrac{52\frac{1}{2}}{42} = 1\frac{1}{4}$ Thlr.

5)

x	1 Pfd. in Berl.
106	100 Pfd. holl.
1	$2\frac{1}{2}$ fl. holl.
250	144 Thlr.
100	$107\frac{1}{2}$ Thlr. für Kosten
100	110 Thlr. für Zoll
100	120 Thlr. im Verkauf

x = 1 Thlr. $27\frac{1101}{1325}$ Sgr.

6)

x	1000 Pfd.
100	$93\frac{1}{3}$ Pfd. für Tara
100	99 Pfd. für Gutgewicht
100	$22\frac{1}{2}$ Thlr.
100	$104\frac{4}{5}$ Thlr. mit den Kosten.

x = 217 Thlr. 26 Sgr. 4,512 Pf.

7)

x	125 Pfd. Leipz.
105	100 Pfd. holl.
1	47 fl. holl.
250	$137\frac{1}{2}$ Thlr.
100	105 Thlr.

x = $3231\frac{1}{4}$ Thlr.

8) a.

x	1200 fl. in Duk.
$5\frac{5}{12}$	$3\frac{1}{5}$ Thlr.

x = 708 Thlr. $27\frac{9}{13}$ Sgr. in Dukaten.

b.

x′	1200 fl. in Karolin
$11\frac{1}{10}$	$6\frac{1}{2}$ Thlr.

x′ = 702 Thlr. = $21\frac{3}{37}$ Sgr. in Karolin

c.

x″	1200 fl. in Kron.
$2\frac{7}{10}$	$\frac{15}{9}$ Thlr.

x = 691 Thlr. $10\frac{20}{27}$ Sgr. in Kronenthlrn.

d.

x‴	1200 fl. in pr. Thlrn.
7	4 Thlr.

x‴ = 685 Thlr. $21\frac{3}{7}$ Sgr. in pr. Thlrn.

Die Zahlung geschieht also am vortheilhaftesten in preußischen Thalern.

9) $13\frac{1}{2}$ Sgr. — $11\frac{1}{4}$ Sgr. = $2\frac{1}{4}$ Sgr.; im Ganzen beträgt der Unterschied 3 Thlr. 3 Sgr. + 6 Thlr. 6 Sgr. = 9 Thlr. 9 Sgr.

Der Unterschied beträgt $2\frac{1}{4}$ Sgr. für 1 Pfd.
 „ „ „ 9 Thlr. 9 Sgr. für 124 Pfd.

10) Der gemeinschaftliche Zinsfuß ist $4\frac{7}{12}$ %. Geht man nun vom 1. März 1850 aus, so sind von da an 1000 fl. nach 12 Mon. und 1400 nach $17\frac{1}{2}$ Mon. zu zahlen. Man erhält also nach §. 26, C.

$$\begin{array}{ll} 1000 \,.\, 12 = 12000 & \\ \underline{1400} \,.\, 17\frac{1}{2} = \underline{24500} & \\ 2400 \qquad\qquad 36500 & \end{array}$$

$36500 : 2400 = 15\frac{5}{24}$. Also ist die mittlere Verfallzeit vom 1. März 1850 an nach $15\frac{5}{24}$ Mon., d. i. am 7. Juni 1851.

Probe.

$$\begin{array}{r} 1000 \,.\, 12 = 12000 \\ 1400 \,.\, 12 = 16800 \\ \hline 28800 \end{array}$$

Wenn beide Kapitalien an dem Tage ihrer Verfallzeit bezahlt werden, so tragen sie so viel Zins, als 28800 fl. in 1 Mon. bringen.

$$\begin{array}{r} 1000 \,.\, 15\frac{5}{24} = 15208\frac{1}{3} \\ 1400 \,.\, 9\frac{17}{24} = \underline{13591\frac{2}{3}} \\ 28800\,. \end{array}$$

Wenn also beide Kapitalien vom 1. März 1850 an nach $15\frac{5}{24}$ Mon. bezahlt werden; so haben sie bis dahin eben so viel Zins getragen, als 28800 fl. in 1 Mon. bringen.

11)

x	$22\frac{5}{8}$ fl.
100	$93\frac{1}{4}$ fl. wegen Rabatt
100	$107\frac{1}{2}$ fl. wegen Kosten
100	115 fl. „ Gewinn

x = 26 fl. 4,9 . . . Kzr.

12) Will der Kaufmann 8 % gewinnen, so muß das Pfd. um $28\frac{1861874}{3161152}$ Kzr. verkauft werden, was sich aus dem Ansatze ergibt:

x	1 Pfd. bad.
0,98786	1 Pfd. holl.
100	38 fl. holl.
1216	1225 fl. bad.
100	$103\frac{1}{2}$ fl. wegen Fracht
100	110 fl. wegen Zoll
100	108 fl. wegen Gewinn
1	60 Kzr.

$28\frac{18}{31}$ Kzr.

Würde bei günstigen Verhältnissen der Kaufmann 25 % gewinnen, so müßte das Pfd. um $33\frac{563343}{6322304}$ Kzr. verkauft werden.

13) 720 × ½ Sgr. = 12 Thlr. täglich.

Auslage	= 40385 Thlr.
die 10-jährigen Zinsen	= 20192½ „
Gewinn	= 13882½ „
	74460 Thlr.

a.

x	74460 Thlr.
12	1 Tag
365	1 Jahr

x = 17 Jahre.

b.

x′	17 Jahren
$12\frac{3}{4}$	720 Pers. täglich

x′ = 960 Personen täglich.

14)

x	1 Liv. Sterl.
1200	14490 fl.
100	210 Fr.
$100\frac{5}{8}$	100 Fr. in Paris

x = 25 Fr. 20 Cts.

15) Man suche zuerst die Verfallzeiten: 8. Aug.; 29. Aug.; 23. Aug.; 10. Sept.; 29. Juli.

Um nun die Zahl der Tage zu finden, die jeder Posten noch zu laufen hat, kann man entweder vom 24. Juli (dem Datum der Verfallzeit) oder von der frühesten Verfallzeit ausgehen. (§. 26, C.)

a. Vom 24. Juli
- bis 8. Aug. = 14 Tage;
- „ 29. „ = 35 „ ;
- „ 23. „ = 29 „ ;
- „ 10. Sept. = 46 „ ;
- „ 29. Juli = 5 „ .

$$\begin{aligned}
250 \times 14 &= 3500 \\
135 \times 35 &= 4725 \\
220 \times 29 &= 6380 \\
196 \times 46 &= 9016 \\
104 \times 7 &= 728 \\
\overline{905} \qquad & \overline{24349}
\end{aligned}$$

24349 : 905 = 27 Tage beiläufig vom 24. Juli an = 21 Aug. gemeinschaftliche Verfallzeit.

Oder:

b. Vom 29. Juli
bis 8. Aug. = 9 Tage
⸗ 29. ⸗ = 30 ⸗
⸗ 23. ⸗ = 24 ⸗
⸗ 10. ⸗ = 41 ⸗
⸗ 29. ⸗ = 0 ⸗.

250	× 9	=	2250
135	× 30	=	4050
220	× 24	=	5280
196	× 41	=	8036
104	× 0	=	0
905			19616

19616 : 905 = $21\frac{2}{3}$ Tage beiläufig = 22 Tage vom 29. Juli an, also am 21. August.

In unterzeichnetem Verlage sind ferner erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Gruber, Karl, Der Rechenunterricht in der Volks- und höhern Bürgerschule. Eine lückenlos fortschreitende Reihe von Fragen und Aufgaben. XI. Auflage. 30 kr. Jede der 5 Stufen wird einzeln und broschirt für 6 kr. abgegeben.

—, Der Arithmetische Unterricht in Gymnasien und höhern Bürgerschulen. Eine Fortsetzung des Rechenunterrichts in der Elementarschule. Preis 1 fl. 30 kr.

—, Deutsche Sprachlehre. Für den Lehrer bearbeitet. Zweite vermehrte Auflage. Preis 1 fl. 30 kr.

—, Der Unterricht in der Raumlehre oder Geometrie. Zum Gebrauche für Schüler in den untern Klassen der Mittelschulen. Preis 40 kr.

Hermanuz, Raim., Lesebuch für Volksschulen. I. Stufe. Sammlung passender Lesestücke für Kinder von 7 bis 9 Jahren. Preis geh. 6 kr.

—, desselben II. Stufe. Sammlung passender Lesestücke für Kinder von 9 bis 12 Jahren. Preis roh 12 kr., geh. 15 kr.

Bauer, J., Der Küchengartenfreund, oder Anweisung zur vortheilhaften Benützung der Gemüsegärten. geh. Preis 36 kr.

—, Der praktische Landwirth, in 3 Bändchen. geh. 3 fl. 9 kr.

Daraus einzeln:

1s Bändchen, Feldbau. Preis 1 fl. 18 kr.
2s " Obst-, Küchengarten- und Weinbau. Preis 1 fl. 6 kr.
3s " Thierzucht. Preis 1 fl. 30 kr.

Ueber die Leistungen und Mittel zur Hebung der deutschen Volksschule. Mit Rücksicht auf die Volksschule im Großherzogthum Baden. Von Germanus. Preis broschirt 12 kr.

Karlsruhe, im Januar 1851.

G. Braun'sche Hofbuchhandlung.

In dem Verlage von Fr. Bassermann in Mannheim sind erschienen und gleichfalls durch die **G. Braun'sche** Hofbuchhandlung zu erhalten:

Gruber, Karl, Die Raumformen- und Raumgrößenlehre in Verbindung mit dem Zeichnungsunterrichte. Zum Gebrauche für Lehrer an Volks- und Gewerbschulen. II. vermehrte Auflage. Preis 1 fl. 12 kr.

Schach, M., Anleitung zum Unterrichte in der Erdbeschreibung, Naturgeschichte und Naturlehre. Für Volksschullehrer bearbeitet. gr. 8. Mit 58 Holzschnitten und 5 Blatt Lithographien. II. Auflage. Preis 54 kr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gruber, Karl

Ausführliche Anleitung zum Gebrauche des 'Rechenunterrichts in der Volks- und höhern Bürgerschule' nebst der Beantwortung der in diesem Buche enthaltenen Fragen und Aufgaben Für den Lehrer bearbeitet von Karl Gruber

Karlsruhe 1851

Math.p. 188 q
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081865-2